ACADÉMIE DES SCIENCES.

SÉANCE DU LUNDI 8 JANVIER 1917.

PRÉSIDENCE DE M. A. D'ARSONVAL.

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS
DES MEMBRES ET DES CORRESPONDANTS DE L'ACADÉMIE.

M. le **Président** s'exprime en ces termes :

Mes chers Confrères,

Notre vénéré ancien président le professeur **Chauveau** s'est éteint doucement dans la 90ᵉ année de son âge. Une cérémonie intime a eu lieu samedi à l'église Notre-Dame où le corps a été provisoirement déposé. Les funérailles officielles se feront solennellement à Lyon après la guerre.

Avec Chauveau disparaît une des plus grandes figures de la Science biologique.

Jamais longue carrière scientifique ne fut mieux remplie, car notre confrère a eu le rare bonheur de conserver jusqu'à son dernier jour la plénitude de ses brillantes facultés.

Je n'énumérerai pas ses nombreux titres honorifiques. Tous les corps savants compétents, tant en France qu'à l'étranger, ont tenu à se l'adjoindre, ainsi qu'il arrive aux hommes éminents qui jettent un lustre nouveau sur les distinctions qu'ils consentent à accepter.

L'Académie des Sciences fut toujours son milieu préféré, c'est à Elle qu'il a confié la primeur de ses précieuses découvertes. Le seul énoncé de ses communications tiendrait dix pages des *Comptes rendus;* aussi me bornerai-je à signaler brièvement les grandes lignes directrices de son œuvre magistrale.

De tous les grands problèmes de la Physiologie et de la Pathologie aucun ne lui est demeuré étranger. C'est ainsi que, dès 1863, il aborde expérimentalement l'importante question de la contagion et de son corollaire, l'immunisation, puis l'étude de l'excitant physiologique par excellence

l'électricité, et enfin le fonctionnement encore si mystérieux du moteur animé. Avec son grand talent d'expérimentateur il étudie ses besoins, les transformations d'énergie dont il est le siège, pour arriver à établir sur des bases scientifiques l'alimentation rationnelle de l'homme et des animaux.

C'est par cet ensemble harmonieux que l'œuvre de Chauveau revêt un caractère éminemment social.

Dès le début de ses recherches sur la clavelée, la variole et la vaccine, il démontre la fausseté de la croyance, alors générale, de la spontanéité des maladies virulentes ou infectieuses. Il fait justice des entités du *Quid ignotum*, du *Quid divinum* et du *génie épidémique*.

Par dilution, filtration, décantation, diffusion des substances virulentes, il montre que le *contage* n'est ni un liquide ni un gaz, mais un élément solide qu'il qualifie de *corpusculaire*.

Il termine son Mémoire par ces mots que je transcris littéralement :

« Ces maladies n'ont pas d'autre cause que la contagion, et celle-ci procède toujours d'un agent spécial, le virus, organisme ou organite, que la spontanéité vitale est impuissante à créer de toutes pièces... L'étude d'un tel agent peut être faite par les méthodes rigoureuses applicables à l'histoire naturelle des êtres vivants... Soyez sûrs que la méthode expérimentale le déterminera bientôt... Ce sera le point de départ de recherches qui permettront peut-être d'opposer, à chaque virus pernicieux, un agent atténué de même famille, jouant le rôle, jusqu'à présent unique, du virus vaccinal. »

Ces vues prophétiques, notre immortel Pasteur en faisait bientôt des réalités et expliquait tous ces phénomènes par la même théorie, celle du *virus ferment*.

Les mémorables travaux de Villemin sur la contagiosité de la tuberculose n'ont pas d'abord rencontré l'accueil qu'ils méritaient. Chauveau fut un des premiers à en saisir la portée.

En 1867, il fit des expériences d'une précision absolue qui établirent deux faits nouveaux, à savoir : 1° que l'ingestion de viandes tuberculeuses donne la tuberculose, qu'il y a infection par le tube digestif, et 2° que, contrairement à l'opinion de Virchow, alors universellement adoptée, il n'y a aucune différence de nature entre la tuberculose de l'homme et celle du bœuf. Si, en effet, l'homme donne la tuberculose au bœuf, la réciproque est également vraie.

L'émotion provoquée par ces graves conclusions fut considérable. Et elles ont servi de base aux règlements sur la police sanitaire et la surveillance du service de la boucherie.

Ses recherches sur l'excitant électrique ont montré la nature *polaire* de l'excitation et ont doté la Physiologie de méthodes de mesure très précises. Je me bornerai à signaler ses travaux classiques sur les mouvements du cœur et la circulation entrepris avec Marey.

Enfin dans les dernières années de sa vie, Chauveau, avec l'aide de son assistant Tissot, a abordé le difficile problème de la contraction et de l'énergétique musculaires.

Un grave dissentiment divise physiciens et physiologistes sur le sens à attribuer au mot *travail*. Quand un homme exerce un violent effort de tous les muscles de son corps pour résister à une poussée, sans mouvement apparent, ou quand, plus simplement, il tient à bras tendu un poids, il ne fait aucun travail au dire des physiciens.

Pourtant dans ces conditions le patient, fût-il le plus rigoriste des physiciens, éprouvera bientôt le sentiment pénible d'une énorme dépense d'énergie.

Cette dépense est réelle, car elle se traduit non seulement par la fatigue (effet subjectif), mais aussi par une augmentation des combustions internes (effet objectif mesurable). Si le poids soutenu par le bras est immobile il y a travail *statique* ou *improductif*, s'il est soulevé le travail est *positif*, *négatif* s'il est abaissé. Cette terminologie employée par Chauveau donne évidemment prise à la critique. Mais dans chacun de ces trois cas il y a une dépense d'énergie incontestable qui aboutit à cette réalité : un *travail physiologique* dont Chauveau a cherché par des expériences systématiques à dégager les lois.

Si les résultats qu'il a obtenus ne sont pas en proportion de la peine qu'il s'est donnée, n'est-ce pas chose touchante que de voir ce maître de la Physiologie aborder fructueusement à 80 ans une des études les plus abstraites et les plus délicates de la Biologie.

Mais, mes chers Confrères, je m'arrête devant le sentiment de mon impuissance à retracer en quelques mots une existence si bien remplie.

Par la dignité de sa vie, par sa recherche constante de l'amélioration des conditions de la vie humaine, par la majesté naturelle émanant de toute sa personne, Chauveau restera une des plus belles figures qu'ait produite la culture française.

ANALYSE. — *Sur la valeur approchée d'une intégrale définie.* Note de M. **Maurice Hamy**.

Des recherches particulières sur la diffraction des disques circulaires, uniformément éclairés, m'ont conduit à évaluer l'intégrale

$$I = \int_{-1}^{+1} \sqrt{1-u^2}\frac{\sin^2 mu}{u^2}\,du,$$

lorsque m a une valeur très élevée, entière, fractionnaire ou incommensurable. Je me propose de montrer, dans la présente Communication, comment on peut y parvenir, en s'appuyant sur des questions largement traitées dans mon Mémoire sur l'approximation des fonctions de grands nombres [1].

Dans le plan représentatif de la variable u, considérée comme complexe, décrivons, de l'origine comme centre, une demi-circonférence de rayon infiniment petit, du côté des ordonnées positives. La fonction sous le signe $\int$ étant holomorphe, dans le voisinage de la valeur $u = 0$, on peut remplacer le diamètre de cette demi-circonférence, qui fait partie du chemin d'intégration donné, par la courbe elle-même. Appelons C le contour d'intégration ainsi obtenu. On peut écrire

$$I = \frac{1}{2}\int_C \frac{\sqrt{1-u^2}}{u^2}\,du - \frac{1}{2}\int_C \frac{\sqrt{1-u^2}}{u^2}\cos 2mu\,du.$$

La fonction primitive de $\frac{\sqrt{1-u^2}}{u^2}$ ayant pour valeur

$$-\frac{\sqrt{1-u^2}}{u} - \arc\sin u \qquad \left(-\frac{\pi}{2} < \arc\sin u < +\frac{\pi}{2}\right),$$

on en déduit

$$I = -\frac{\pi}{2} - \frac{H}{2},$$

en faisant

$$H = \int_C \frac{\sqrt{1-u^2}}{u^2}\cos 2mu\,du.$$

Posons

$$K = \int_C \frac{\sqrt{1-u^2}}{u^2}\sin 2mu\,du.$$

---

(1) *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 1908.

La valeur de H est réelle, comme celle de I. D'autre part, la valeur de K se compose de plusieurs parties. Celles qui proviennent de l'intégration, le long de l'axe des abscisses, sont réelles; mais celle qui se rapporte à la demi-circonférence infiniment petite, comprise dans le chemin C, est égale à $-2m\pi\sqrt{-1}$, comme on le reconnaît en développant l'élément différentiel dans le voisinage de $u=0$. Il résulte de là : 1° que la somme

$$2m\pi\sqrt{-1}+K$$

est réelle; 2° que H est la partie réelle de l'expression

$$H+\sqrt{-1}\left[2m\pi\sqrt{-1}+K\right],$$

c'est-à-dire de $-2m\pi+J$, J désignant l'intégrale

$$J=\int_C \frac{\sqrt{1-u^2}}{u^2}E^{2mu\sqrt{-1}}\,du,$$

où E représente la base des logarithmes népériens. Il est facile de voir, du reste, que J est réelle; mais ce point n'a pas d'importance ici.

Par les points $u=-1$ et $u=+1$, menons deux ordonnées positives et raccordons leurs extrémités par un arc de courbe quelconque ne rencontrant pas l'axe des abscisses. Prenons arbitrairement un point X, sur cet arc, et appelons C′ le chemin composé de l'ordonnée passant par le point $u=-1$ et de la partie de l'arc de courbe qui joint son extrémité au point X. Appelons, de même, C″ le chemin composé de l'ordonnée menée au point $u=+1$ et de la seconde partie de l'arc de courbe qui se termine au point X. Si l'on s'assujettit à parcourir les chemins C′ et C″, en partant respectivement des points $u=-1$ et $u=+1$, on peut écrire

$$J=\int_{C'}-\int_{C''},$$

l'élément différentiel n'ayant pas de singularités dans l'aire limitée par les chemins C, C′, C″. Or le module de la fonctions $E^{u\sqrt{-1}}$ décroît quand on s'éloigne de l'axe des abscisses, du côté des ordonnées positives. Chacune des intégrales entrant dans l'expression de J est donc de la forme

$$\int f(u)\quad \varphi^n(u)\,du,$$

où n représente le grand nombre $2m$, $|\varphi(u)|$ prenant d'ailleurs sa plus grande valeur, le long du contour d'intégration, à l'extrémité d'où part la variable. J'ai montré (*loc. cit.*) que la valeur de pareilles intégrales s'obtient, avec une faible erreur relative, notamment lorsque les dévelop-

pements des fonctions f et φ, dans le voisinage du point de départ de la variable, sont algébriques. Or c'est ce qui arrive dans le cas actuel.

Dans le voisinage du point $u = -1$, on a, le long du contour C',

$$f(u) = \sqrt{2}\sqrt{u+1}\left[1 + \frac{7}{4}(u+1) + \ldots\right]$$

et, dans le voisinage du point $u = 1$, le long du contour C'',

$$f(u) = \sqrt{2}\,E^{-\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}}\sqrt{u-1}\left[1 - \frac{7}{4}(u-1) + \ldots\right],$$

les binomes $u+1$ et $u-1$ étant affectés de leur plus petit argument positif.

Partant de ces développements, et appliquant la formule (41) de mon Mémoire (*loc. cit.*, p. 252), en négligeant le second terme, on obtient [1]

$$\int_{C'} = -E^{-\left(\frac{\pi}{4}+2m\right)\sqrt{-1}}\frac{\sqrt{\pi}}{4m^{\frac{3}{2}}}(1+\varepsilon'),$$

$$\int_{C''} = E^{\left(\frac{\pi}{4}+2m\right)\sqrt{-1}}\frac{\sqrt{\pi}}{4m^{\frac{3}{2}}}(1+\varepsilon''),$$

puis

$$J = -\frac{\sqrt{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{4}+2m\right)}{2m^{\frac{3}{2}}}(1+\varepsilon),$$

ε', ε'', ε tendant vers zéro, lorsque m augmente indéfiniment. Il en résulte

$$H = -2m\pi - \frac{\sqrt{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{4}+2m\right)}{2m^{\frac{3}{2}}}(1+\varepsilon)$$

et

$$I = \left(m - \frac{1}{2}\right)\pi + \frac{\sqrt{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{4}+2m\right)}{4m^{\frac{3}{2}}}(1+\varepsilon).$$

On pourrait, du reste, développer ε suivant les puissances de $\frac{1}{m}$, en considérant les termes qui suivent le premier, dans chacun des deux développements de $f(u)$.

---

(1) Je signale un erratum, au bas de la page 251 de mon Mémoire : au lieu de $\int f(z)\varphi^n(z)\,dz$, lire $\int f(u)\varphi^n(u)\,du$.

HYDRODYNAMIQUE. — *Sur une extension des équations de la théorie des tourbillons et des équations de Weber.* Note de M. **Paul Appell.**

La théorie classique des tourbillons dans un fluide sans viscosité est établie dans l'hypothèse que les accélérations des divers points du fluide dérivent d'un potentiel. Sur la production des tourbillons, quand cette condition n'est pas remplie, on pourra consulter une Note de Schütz (*Ann. Phys. und Chemie*, Dritte Folge, Bd 56, 1895, p. 144-145) et un article de Silberstein (*Bulletin international de l'Académie des Sciences de Cracovie*, 1896-1897, p. 280-290).

Voici, pour le cas général de l'Hydrodynamique des fluides parfaits, des équations qui présenteront peut-être quelque intérêt. En vue d'un travail plus détaillé, je serai reconnaissant des indications bibliographiques qui pourront m'être données.

Les équations du mouvement d'un fluide parfait sont

$$(1)\qquad u' = X - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}, \qquad v' = Y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}, \qquad w' = Z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z},$$

u', v', w' désignant les projections de l'accélération

$$u' = \frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x}u + \frac{\partial u}{\partial y}v + \frac{\partial u}{\partial z}w,$$

. . . .

I. Employons d'abord les variables dites *de Lagrange*, à savoir : le temps t et les valeurs initiales a, b, c des coordonnées x, y, z d'une particule pour $t = 0$.

Appelons δa, δb, δc des variations arbitraires de a, b, c, et δx, δy, δz les variations correspondantes de x, y, z prises en regardant t comme constant. Posons

$$(2)\qquad X\,\delta x + Y\,\delta y + Z\,\delta z = A\,\delta a + B\,\delta b + C\,\delta c;$$

$$(3)\qquad \begin{cases} A_1 = \displaystyle\int_0^t A\,dt, & B_1 = \displaystyle\int_0^t B\,dt, & C_1 = \displaystyle\int_0^t C\,dt, \\ A_2 = -\displaystyle\int_0^t \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial a}\,dt, & B_2 = -\displaystyle\int_0^t \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial b}\,dt, & C_2 = -\displaystyle\int_0^t \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial c}\,dt; \end{cases}$$

où A, B, C, ρ et p sont supposés exprimés en a, b, c, t.

Introduisons maintenant le tourbillon ξ, η, ζ de la vitesse, le tourbillon initial ξ_0, η_0, ζ_0, et les vecteurs tourbillons auxiliaires

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} \xi_1 &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial C_1}{\partial b} - \frac{\partial B_1}{\partial c}\right), & \eta_1 &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial A_1}{\partial c} - \frac{\partial C_1}{\partial a}\right), & \ldots; \\ \xi_2 &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial C_2}{\partial b} - \frac{\partial B_2}{\partial c}\right), & \eta_2 &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial A_2}{\partial c} - \frac{\partial C_2}{\partial a}\right), & \ldots. \end{aligned}\right.$$

Un calcul, analogue à celui de Cauchy, donne finalement les trois relations

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\rho_0}{\rho}\xi &= (\xi_0+\xi_1+\xi_2)\frac{\partial x}{\partial a} + (\eta_0+\eta_1+\eta_2)\frac{\partial x}{\partial b} + (\zeta_0+\zeta_1+\zeta_2)\frac{\partial x}{\partial c}, \\ \frac{\rho_0}{\rho}\eta &= (\xi_0+\xi_1+\xi_2)\frac{\partial y}{\partial a} + (\eta_0+\eta_1+\eta_2)\frac{\partial y}{\partial b} + (\zeta_0+\zeta_1+\zeta_2)\frac{\partial y}{\partial c}, \\ \frac{\rho_0}{\rho}\zeta &= (\xi_0+\xi_1+\xi_2)\frac{\partial z}{\partial a} + (\eta_0+\eta_1+\eta_2)\frac{\partial z}{\partial b} + (\zeta_0+\zeta_1+\zeta_2)\frac{\partial z}{\partial c}. \end{aligned}\right.$$

Pour $t = 0$, ξ_1, η_1, ζ_1, ξ_2, η_2, ζ_2 sont nuls et ξ, η, ζ se réduisent à ξ_0, η_0, ζ_0. A un instant t les équations (5) donnent le tourbillon ξ, η, ζ. Les lignes du tourbillon à l'instant t

$$(6)\quad \frac{\delta x}{\xi} = \frac{\delta y}{\eta} = \frac{\delta z}{\zeta}$$

ont, pour images dans le milieu initial, les lignes

$$(7)\quad \frac{\delta a}{\xi_0+\xi_1+\xi_2} = \frac{\delta b}{\eta_0+\eta_1+\eta_2} = \frac{\delta c}{\zeta_0+\zeta_1+\zeta_2}$$

qui changent avec t, à moins que $\xi_1+\xi_2$, $\eta_1+\eta_2$, $\zeta_1+\zeta_2$ soient proportionnels à ξ_0, η_0, ζ_0.

Ce dernier résultat conduit à un théorème de Sir W. Thomson, d'après lequel les lignes de tourbillon se conservent quand le tourbillon de l'accélération

$$(8)\quad \xi' = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w'}{\partial y} - \frac{\partial v'}{\partial z}\right), \qquad \eta' = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u'}{\partial z} - \frac{\partial w'}{\partial x}\right), \qquad \zeta' = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v'}{\partial x} - \frac{\partial u'}{\partial y}\right)$$

est parallèle au tourbillon ξ, η, ζ de la vitesse.

II. Si l'on considère l'expression différentielle

$$(9)\quad u\,\delta x + v\,\delta y + w\,\delta z - (u_0 + A_1 + A_2)\,\delta a - (v_0 + B_1 + B_2)\,\delta b - (w_0 + C_1 + C_2)\,\delta c,$$

les équations précédentes expriment qu'elle est une différentielle totale

d'une fonction $F(a, b, c, t)$. On a donc

$$(10) \quad \begin{cases} u\dfrac{\partial x}{\partial a} + v\dfrac{\partial y}{\partial a} + w\dfrac{\partial z}{\partial a} = u_0 + A_1 + A_2 + \dfrac{\partial F}{\partial a}, \\ u\dfrac{\partial x}{\partial b} + v\dfrac{\partial y}{\partial b} + w\dfrac{\partial z}{\partial b} = v_0 + B_1 + B_2 + \dfrac{\partial F}{\partial b}, \\ u\dfrac{\partial x}{\partial c} + v\dfrac{\partial y}{\partial c} + w\dfrac{\partial z}{\partial c} = w_0 + C_1 + C_2 + \dfrac{\partial F}{\partial c}. \end{cases}$$

Dérivant ces équations par rapport à t et tenant compte des équations du mouvement, on trouve

$$(11) \quad \frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2) = \frac{\partial F}{\partial t}.$$

Dans le cas particulier où la densité est fonction de la pression, ξ_2, η_2, ζ_2 sont nuls. Si l'on pose

$$P = \int_{p_0}^{p} \frac{dp}{\rho}, \qquad R = -\int_0^t P\,dt,$$

p_0 étant une constante numérique, on peut écrire

$$A_2 = \frac{\partial R}{\partial a}, \qquad B_2 = \frac{\partial R}{\partial b}, \qquad C_2 = \frac{\partial R}{\partial c}.$$

Dans ce cas, si l'on fait

$$R + F = \Phi,$$

les équations (10) ont pour seconds membres

$$u_0 + A_1 + \frac{\partial \Phi}{\partial a}, \qquad v_0 + B_1 + \frac{\partial \Phi}{\partial b}, \qquad w_0 + C_1 + \frac{\partial \Phi}{\partial c}$$

et (11) s'écrit

$$-P + \frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2) = \frac{\partial \Phi}{\partial t}.$$

Si au contraire la force dérive d'une fonction U, ξ_1, η_1, ξ_1 sont nuls, et en posant

$$V = \int_0^t U\,dt,$$

U étant exprimé en a, b, c, t, on a

$$A_1 = \frac{\partial V}{\partial a}, \qquad B_1 = \frac{\partial V}{\partial b}, \qquad C_1 = \frac{\partial V}{\partial c}.$$

On peut alors poser

$$V + F = \Psi;$$

les équations (10) ont pour seconds membres

$$u_0 + A_2 + \frac{\partial \Psi}{\partial a}, \qquad v_0 + B_2 + \frac{\partial \Psi}{\partial b}, \qquad w_0 + C_2 + \frac{\partial \Psi}{\partial c},$$

et (11) s'écrit

$$U + \frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2) = \frac{\partial \Psi}{\partial t}.$$

Si les deux circonstances se présentent en même temps, on revient aux équations de Weber (*Journal de Crelle*, t. 68, 1867).

III. Nous ne nous arrêterons pas à l'expression de la circulation telle qu'elle résulte du fait que l'expression (9) est une différentielle totale.

Terminons en remarquant que, dans le système des variables d'Euler, les équations précédentes peuvent être rattachées aux relations

$$(12) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\xi}{\rho}\right) = \dfrac{\xi'}{\rho} + \dfrac{\xi}{\rho}\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\eta}{\rho}\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\zeta}{\rho}\dfrac{\partial u}{\partial z}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \end{array} \right.$$

que j'ai données dans un Mémoire [1], *Sur quelques fonctions de point dans le mouvement d'un fluide*, et qui se réduisent aux équations de la théorie des tourbillons, quand l'accélération dérive d'un potentiel, c'est-à-dire quand $\xi' = \eta' = \zeta' = 0$.

Supposons, par exemple, que ρ étant fonction de p, la force X, Y, Z soit une force conservative accompagnée d'une résistance au mouvement dirigée en sens contraire de la vitesse et proportionnelle à la vitesse

$$X = \frac{\partial U}{\partial x} - ku, \qquad Y = \frac{\partial U}{\partial y} - kv, \qquad Z = \frac{\partial U}{\partial z} - kw$$

(k, constante positive). On a alors, d'après (1),

$$\xi' = -k\xi, \qquad \eta' = -k\eta, \qquad \zeta' = -k\zeta,$$

et les équations (12) s'écrivent

$$\frac{d}{dt}\left(e^{kt}\frac{\xi}{\rho}\right) = e^{kt}\left(\frac{\xi}{\rho}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\eta}{\rho}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\zeta}{\rho}\frac{\partial u}{\partial z}\right)$$

qui sont les équations de la théorie des tourbillons, sauf le changement de ξ, η, ζ en $e^{kt}\xi$, $e^{kt}\eta$, $e^{kt}\zeta$, et dont les conséquences se développent aisément.

---

(1) *Journal de Mathématiques*, de M. Jordan, 5e série, t. 9, 1903, p. 5, et *Bulletin de la Société mathématique de France*, t. 31, 1903, p. 68.

En général si l'on suppose, dans le cas où le théorème de Sir W. Thomson s'applique,

$$\xi' = -\lambda\xi, \qquad \eta' = -\lambda\eta, \qquad \zeta' = -\lambda\zeta,$$

λ étant une fonction de t, les équations (12) se ramènent à la forme classique où ξ, η, ζ sont remplacés par $\mu\xi$, $\mu\eta$, $\mu\zeta$, μ étant égal à $e^{\int \lambda\, dt}$; on voit alors quels changements subiront les théorèmes de la théorie ordinaire des tourbillons.

M. **Pierre Termier**, offrant à l'Académie, de la part de l'auteur, un Mémoire en langue allemande sur la structure des Alpes suisses sud-orientales, récemment publié dans la série des *Beiträge zur geologischen Karte der Schweiz*, s'exprime en ces termes :

Le Mémoire que je présente aujourd'hui à l'Académie est intitulé *Zur Tektonik der sudöstlichen Schweizeralpen;* il a pour auteur M. Rudolf Staub, de Zürich, et forme une partie de la 76ᵉ livraison des *Beiträge* (46ᵉ livraison de la nouvelle série). Une planche en couleurs, jointe au Mémoire, comprend une carte structurale à l'échelle de $\frac{1}{250000}$ et sept profils.

La région étudiée par M. Staub comprend les Alpes du Tessin, des Grisons et de la Haute-Italie, entre les méridiens de Locarno (à l'Ouest) et du Stelvio (à l'Est), et entre les parallèles d'Ilanz (au Nord) et de la Valteline (au Sud). Elle embrasse les massifs de l'Adula, du Tambo, de la Suretta, du Piz d'Err, de la Bernina, du Monte della Disgrazia; les montagnes qui enserrent la Haute-Engadine, et celles qui séparent la vallée de l'Inn du Col de Stelvio et du massif de l'Ortler. Connu dans ses grandes lignes depuis 1902, 1903 ou 1904, ce pays a été très attentivement exploré, après 1904, par les géologues suisses et allemands. A l'Ouest, MM. E. Argand et C. Schmidt; à l'Est, MM. F. Zyndel et H.-P. Cornelius, ont particulièrement contribué à nous le faire bien connaître. M. Staub a publié lui-même en 1914 une étude tectonique sur le massif de la Bernina, étude qui est une introduction au Mémoire synthétique dont je parle.

Au nord d'une ligne qui, dans la région en question, est dirigée à peu près Est-Ouest et que l'auteur fait passer par le lac de Poschiavo et par Claro, toutes ces Alpes sont *pays de nappes*. Au sud de la même ligne, les nappes *s'enracinent*, et une zone de plis aigus, dressés jusqu'à la verticale, ou même renversés vers le Sud, apparaît : c'est la *zone des racines* des

nappes. Large d'une vingtaine de kilomètres, elle passe par Locarno et Bellinzona; elle est entaillée par les profondes coupures où coulent le Tessin et la Mera, où gisent les lacs Majeur et de Côme; et c'est le long de cette zone que court l'Adda dans la basse Valteline. La ligne séparative des plis et des nappes tracée par M. Staub se raccorde, un peu au sud de Bormio, à celle qui joue le même rôle dans les Alpes autrichiennes et que j'ai tracée, en 1904, jusqu'aux Hohe Tauern. Au Sud, la zone des racines est limitée par le *bord alpino-dinarique*. M. Staub, prenant le tracé de ce bord où je l'avais laissé en 1904, l'a prolongé pas à pas dans la basse Valteline, puis dans les montagnes qui séparent la Mera du Tessin, enfin à l'ouest du lac Majeur, jusqu'à Ornavasso. Il signale, le long de ce bord, des phénomènes d'écrasement continus et intenses; et le bord alpino-dinarique lui paraît être l'affleurement d'une surface de friction ou de charriage.

M. Staub s'est proposé le problème suivant : rattacher chacune des nappes empilées qui forment les montagnes des Grisons à sa racine. La zone des racines, dans la région de Bellinzona, se laisse diviser en cinq bandes parallèles, formée de terrains cristallins un peu différents et enserrant, çà et là, quelques lambeaux de calcaire triasique. D'autre part, les nappes qui s'empilent dans les montagnes des Grisons sont assurément très nombreuses; mais on a souvent pris pour deux nappes indépendantes des digitations ou des redoublements locaux de la même nappe, et le nombre des nappes principales (Stammdecken) peut, d'après M. Staub, être ramené à cinq. Ce sont, de bas en haut : la nappe de l'Adula; la nappe de Tambo et de la Suretta; la nappe rhétique; la nappe austro-alpine inférieure; la nappe austro-alpine supérieure. Cette dernière est la nappe de la Silvretta et du massif de l'Œtztal. La nappe rhétique de M. Staub est notablement différente de celle que M. Steinmann a désignée sous ce nom; et peut-être un nom nouveau eût-il été préférable.

M. Staub montre avec beaucoup de clarté que les quatre plus basses de ses *Stammdecken* se relient à quatre des bandes cristallines de la région de Bellinzona, chacune de ces dernières étant la racine de l'une des nappes. Le rattachement de la nappe à sa racine paraît tout à fait démontré pour la nappe de l'Adula et pour la nappe austro-alpine inférieure. Cela entraîne naturellement des rattachements analogues pour les deux nappes intermédiaires, encore que la liaison nappe-racine, pour ces deux nappes, soit masquée par l'apparition au milieu d'elles d'un granite post-alpin, qui est la *tonalité* du Monte della Disgrazia. Les observations de M. Staub con-

firment celles de M. Cornelius au sujet de l'âge de cette tonalite. Elle est bien, comme M. Steinmann l'avait pressenti dès avant 1912, postérieure à la formation des nappes, c'est-à-dire probablement oligocène.

Reste l'enracinement de la nappe la plus haute des Grisons, celle de la Silvretta. M. Staub considère que cet enracinement se fait dans la zone cristalline des lacs (Seegebirge), zone qui est au sud du bord alpino-dinarique et qui appartient, par conséquent, aux Dinarides. Pour M. Staub, la nappe de la Silvretta est un morceau des Dinarides, un témoin du *traîneau écraseur* qui est passé sur les Alpes. En tout cas, l'avancée générale des Dinarides sur les Alpes semble à M. Staub définitivement démontrée; et, pour lui comme pour moi, c'est à cette avancée que sont dues les nappes alpines.

J'avoue n'être pas convaincu que le Seegebirge soit réellement la racine de la nappe de la Silvretta. S'il en était ainsi, la nappe en question serait la plus haute de toutes les nappes autrichiennes. Chacun sait aujourd'hui que, sur elle, il y a plusieurs autres nappes; et c'est seulement à la plus élevée de toutes ces nappes qu'on peut attribuer une origine dinarique. Je crois que la racine de la nappe de la Silvretta se cache *sous le Seegebirge*, c'est-à-dire *sous* les Dinarides.

Cette réserve faite, et une autre encore touchant les raccordements des racines bellinzoniennes aux racines des nappes pennines, je dirai que j'ai lu le Mémoire de M. Staub avec une grande admiration. Ce Mémoire clarifie les descriptions un peu confuses qu'on nous avait données jusqu'ici de ces Alpes suisses sud-orientales; il est une remarquable tentative de synthèse qu'on peut croire, en majeure partie, définitive, et il fait vraiment honneur à l'école d'où il est sorti, l'école d'Albert Heim.

HYDRAULIQUE. — *Calcul du coup de bélier dans une conduite forcée, formée de deux sections de diamètres différents.* Note (¹) de M. DE SPARRE.

En général (²), si θ et θ' sont commensurables, on posera, p et q étant premiers entre eux,

$$\theta = p\theta_1, \qquad \theta' = q\theta_1,$$

et l'on considérera des périodes de durée égale à θ_1. On posera alors, pour

(¹) Séance du 26 décembre 1916.

(²) *Comptes rendus*, t. 163, 1916, p. 959.

la $m^{\text{ième}}$ période,

$$(1)\qquad t=(m-1)\theta_1+\tau,$$

où

$$0\leqq\tau<\theta_1,\qquad \xi(t)=\xi_m(\tau),\qquad \lambda(t)=\lambda_m(\tau).$$

On aura alors, pour $m\leqq p$, par la formule (18),

$$(2)\qquad \xi_m(\tau)=2\rho y_0\frac{\lambda_0-\lambda_m(\tau)}{1+\rho\lambda_m(\tau)},$$

puis, pour $p<m\leqq p+q$, par la formule (20),

$$(3)\qquad \xi_m(\tau)=2\rho y_0\frac{\lambda_0-\lambda_m(\tau)-\mu[\lambda_0-\lambda_{m-p}(\tau)]}{1+\rho\lambda_m(\tau)}-\mu\frac{1-\rho\lambda_{m-p}(\tau)}{1+\rho\lambda_m(\tau)}\xi_{m-p}(\tau).$$

Enfin, pour $m>p+q$, on aura, par la formule (21),

$$(4)\qquad \begin{aligned}\xi_m(\tau)=2\rho y_0&\frac{\lambda_{m-p-q}(\tau)-\lambda_m(\tau)+\mu\lambda_{m-p}(\tau)-\mu\lambda_{m-q}(\tau)}{1+\rho\lambda_m(\tau)}\\&-\frac{1-\rho\lambda_{m-p-q}(\tau)}{1+\rho\lambda_m(\tau)}\xi_{m-p-q}(\tau)-\mu\frac{1+\rho\lambda_{m-q}(\tau)}{1+\rho\lambda_m(\tau)}\xi_{m-q}(\tau)\\&-\mu\frac{1-\rho\lambda_{m-p}(\tau)}{1+\rho\lambda_m(\tau)}\xi_{m-p}(\tau).\end{aligned}$$

D'ailleurs, pour les conduites formées de parties de diamètres différents, disposition qui n'est en général employée que pour les très hautes chutes, on peut, en général, considérer, avec une approximation très suffisante, la variation du coup de bélier comme linéaire pendant une période, si le mouvement de la vanne n'éprouve pas de discontinuité pendant cette période.

Désignons alors par ξ' et λ' les valeurs de ξ et de λ en fin de période. Nous aurons, en vertu des formules précédentes, pour $m\leqq p$,

$$(5)\qquad \xi'_m=2\rho y_0\frac{\lambda_0-\lambda'_m}{1+\rho\lambda'_m};$$

pour $p<m\leqq p+q$,

$$(6)\qquad \xi'_m=2\rho y_0\frac{\lambda_0-\lambda'_m-\mu(\lambda_0-\lambda'_{m-p})}{1+\rho\lambda'_m}-\mu\frac{1-\rho\lambda'_{m-p}}{1+\rho\lambda'_m}\xi'_{m-p},$$

et enfin, pour $m>p+q$,

$$(7)\qquad \begin{aligned}\xi'_m=2\rho y_0&\frac{\lambda'_{m-p-q}-\lambda'_m+\mu(\lambda'_{m-p}-\lambda'_{m-q})}{1+\rho\lambda'_m}-\frac{1-\rho\lambda'_{m-p-q}}{1+\rho\lambda'_m}\xi'_{m-p-q}\\&-\mu\frac{1+\rho\lambda'_{m-q}}{1+\rho\lambda'_m}\xi'_{m-q}-\mu\frac{1-\rho\lambda'_{m-p}}{1+\rho\lambda'_m}\xi'_{m-p}.\end{aligned}$$

Ces formules font connaître de proche en proche le coup de bélier à la vanne, quelle que soit la loi de fermeture.

Si la vanne est arrêtée pour $t = n\theta_1$ et maintenue ensuite au repos, la valeur de λ sera constante pour $m \geqq n$ et, si nous désignons par λ' cette valeur constante de λ, nous aurons, en vertu de (7), pour $m \geqq n + p + q$,

$$(8) \qquad \xi'_m = -\frac{1-\rho\lambda'}{1+\rho\lambda'}\xi'_{m-p-q} - \mu\xi'_{m-q} - \mu\frac{1-\rho\lambda'}{1+\rho\lambda'}\xi'_{m-p}.$$

Si, en particulier, il s'agit d'une fermeture ou d'une ouverture dans un temps inférieur à θ_1 (¹), on a, pour $m \leqq p$,

$$(9) \qquad \xi'_m = 2\rho y_0 \frac{\lambda_0 - \lambda'}{1+\rho\lambda'};$$

pour $p < m < p + q$,

$$(10) \qquad \xi'_m = 2\rho y_0 \frac{(\lambda_0 - \lambda')(1-\mu)}{1+\rho\lambda'} - \mu\frac{1-\rho\lambda'}{1+\rho\lambda'}\xi'_{m-p};$$

puis enfin la formule (8) pour $m > p + q$ (²).

Cherchons maintenant le coup de bélier à la jonction des deux parties de diamètres différents et désignons-le par $H(t)$ à l'instant t.

On aura, par la formule (1) où l'on fait $x = l$,

$$H(t) = F\left(t - \frac{\theta}{2}\right) - f\left(t + \frac{\theta}{2}\right).$$

Mais, si nous tenons compte des formules (5) et (6), nous aurons

$$H(t) = \rho y_0\left[\lambda\left(t + \frac{\theta}{2}\right) - \lambda\left(t - \frac{\theta}{2}\right)\right] + \frac{1}{2}\left[\xi\left(t - \frac{\theta}{2}\right) + \xi\left(t + \frac{\theta}{2}\right)\right]$$
$$+ \frac{\rho}{2}\left[\lambda\left(t - \frac{\theta}{2}\right)\xi\left(t - \frac{\theta}{2}\right) - \lambda\left(t + \frac{\theta}{2}\right)\xi\left(t + \frac{\theta}{2}\right)\right].$$

Nous poserons alors

$$t = \frac{\theta}{2} + (m-1)\theta_1 + \tau, \qquad \text{où} \qquad 0 < \tau < \theta_1;$$

et nous désignerons par $H_m(\tau)$ la valeur correspondante de $H(t)$. Nous

---

(¹) Auquel cas on a constamment $\lambda'_m = \lambda'$ pour $m > 0$.

(²) Nous rappelons qu'on a dans ces formules

$$\rho = \frac{a v_1}{2 g y_0} \qquad \text{et, par suite,} \qquad 2g\rho\lambda_0 = \frac{a v_0}{g}.$$

aurons, en remarquant que $\theta = p\theta_1$,

$$(11)\qquad H_m(\tau) = \rho y_0[\lambda_{m+p}(\tau) - \lambda_m(\tau)] + \frac{1}{2}[\xi_m(\tau) + \xi_{m+p}(\tau)] - \frac{\rho}{2}[\xi_m(\tau)\lambda_m(\tau) - \xi_{m+p}(\tau)\lambda_{m+p}(\tau)].$$

Si, en particulier, nous considérons les coups de bélier en fin de période, donc $\tau = \theta_1$, et si nous désignons les valeurs de H, λ, ξ en fin de période par H′, λ', ξ', nous aurons

$$(12)\qquad H'_m = \rho y_0(\lambda'_{m+p} - \lambda'_m) + \frac{1}{2}(\xi'_m + \xi'_{m+p}) - \frac{\rho}{2}(\xi'_m\lambda'_m - \xi'_{m+p}\lambda'_{m+p}).$$

Ces formules permettent, avec l'aide de celles déjà données plus haut, de calculer le coup de bélier à la jonction, quelle que soit la loi de fermeture ou d'ouverture.

MÉMOIRES LUS.

De la transformation secondaire des fractures ouvertes en fractures fermées; par M. Depage.

Avant la guerre, les fractures largement ouvertes ne guérissaient jamais aseptiquement. Leur traitement consistait dans l'application d'un bandage fenêtré, et le drainage du foyer de fracture avec irrigations journalières d'un liquide antiseptique quelconque. La suppuration était la règle, les blessés restaient alités pendant de longs mois et bien souvent dépérissaient sous l'influence de la septicémie. Une fracture ouverte de la cuisse, par exemple, guérissait rarement en moins de 6 mois; plus souvent, la durée de traitement dépassait 1 an et il n'était pas exceptionnel de voir la longue immobilité, à laquelle était soumis le patient, amener des ankyloses et des scléroses musculaires définitives.

La méthode de Carrel, appliquée d'une façon rigoureuse après débridement de la plaie, nous a permis, non seulement de stériliser le foyer de fracture avec contrôle bactériologique à l'appui, mais aussi de fermer le foyer d'une façon régulière par la suture après un laps de temps variant de 15 jours à 1 mois, et de transformer ainsi secondairement la fracture ouverte en fracture fermée.

Voici comment nous procédons :

1° Dès l'arrivée du blessé à l'ambulance (en moyenne de 2 à 6 heures après la blessure), le foyer de fracture est largement débridé, les tissus contus sont réséqués, et les corps étrangers extraits avec soin. Nous enlevons les esquilles libres, mais nous laissons en place celles dont la vitalité ne nous paraît pas compromise. Nous assurons rigoureusement l'hémostase et nous plaçons ensuite des tubes de Carrel en nombre suffisant.

2° La plaie est irriguée toutes les deux heures par le liquide de Dakin, conformément aux prescriptions de Carrel.

3° Les pansements sont renouvelés tous les jours et, en même temps, la plaie est savonnée à l'oléate de sodium neutre, jusqu'à élimination complète de la moindre souillure.

4° Le contrôle bactériologique est fait tous les deux jours. Il consiste dans l'examen d'un frottis, fait avec l'exsudat de la plaie, et dans la numération des microbes par champ du microscope. Les résultats, inscrits sur une feuille spéciale, donnent par leur tracé graphique la courbe bactériologique de la plaie. On fait la suture quand la courbe reste à o après deux ou trois examens consécutifs.

5° La suture est faite par le rapprochement des bords après avivement et ablation du liséré cicatriciel. Les bourgeons charnus sont laissés en place; ils ne gênent nullement la réunion par première intention. Quand la plaie est anfractueuse, on peut dans certains cas combler la dépression en disséquant les bourgeons sur son pourtour, et en les retournant ensuite sur eux-mêmes. Dans certains cas de tension de la peau, il y a lieu de faire des glissements plus ou moins étendus. Parfois, on doit procéder à un débridement cutané. Il arrive enfin que nous ayons recours à la greffe italienne ou à la greffe de Thiersch.

Nos premiers essais datent du mois de juin 1916. Depuis lors, sur un total de 136 fractures débridées des différents segments des membres, nous avons fait 68 sutures avec 66 succès et 2 insuccès seulement.

Dans l'un deux, une fracture du radius, les sutures se sont relâchées par suite d'une tension trop forte de la peau. Il y eut cependant, à la suite de l'intervention, fermeture du foyer de fracture. Dans l'autre cas, relatif à une fracture de la jambe, la suture fut suivie d'un phlegmon, dû à la présence d'un séquestre qui jusque-là avait passé inaperçu.

Ces deux cas redevinrent stériles, au bout de 8 jours, et guérirent par deuxième intention.

Au début, nous n'osions recourir à la suture que dans des cas exceptionnels. Mais, peu à peu, encouragés par nos résultats, nous sommes devenus plus entreprenants ; aujourd'hui ce mode de traitement est devenu la règle dans notre service. Depuis le mois de novembre, nous suturons indistinctement tous les cas et nous estimons, en opérant ainsi, procurer au patient un grand bénéfice, tant au point de vue de la durée du traitement que du résultat fonctionnel.

Ce progrès nouveau, le plus important peut-être qui ait été réalisé en chirurgie au cours de ces dernières années, est une démonstration éclatante de l'efficacité du liquide de Dakin et une confirmation décisive de la valeur de la méthode Carrel.

CORRESPONDANCE.

MM. **Gambier**, **Aldo Massaglia** adressent des remercîments pour les distinctions que l'Académie a accordées à leurs travaux.

M. **Louis Roule** adresse des remercîments pour la subvention qui lui a été accordée sur la *Fondation Loutreuil*.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur une nouvelle suite de conditions pour la convergence des séries de Fourier.* Note de M. **W.-H. Young**, présentée par M. Emile Picard.

1. Les conditions classiques pour la convergence à l'origine de la série de Fourier d'une fonction paire $f(u)$ [1] sont résumées dans les deux suivantes :

1° *$f(u)$ est une fonction à variation bornée ;*

2° $\frac{f(u) - C}{u}$ *est sommable,* C *étant une constante convenablement choisie.*

La somme de la série est dans le premier cas $f(+0)$ et dans le second C.

Dans une Note précédente j'ai montré comment on peut obtenir une suite

(1) Il suffit évidemment d'approfondir ce cas.

continue de conditions en partant du critère 1°. La condition générale de cette suite est la suivante :

I. *$f(u)$ est une fonction paire, telle que*

$$(a) \qquad r u^{-r} \int_0^u t^{r-1} f(t)\, dt$$

ait, pour une certaine quantité positive r, une limite C, unique et finie, quand u s'approche de zéro ;

$$(b) \qquad u^{-q} \int_0^u |d[t^q f(t)]|$$

soit bornée dans un certain voisinage de l'origine, pour une certaine quantité q positive ou nulle.

La somme de la série est alors C.

Cette suite I, qui a la condition classique 1° pour membre initial, contient aussi la généralisation de la condition que j'avais formulée il y a quelques années; la valeur correspondante de q est 1.

Nous allons voir que la condition classique 2° peut aussi être généralisée et donne lieu à une nouvelle suite continue de conditions II.

2. La formulation des conditions II se trouve dans le théorème suivant :

Posons

$$\varphi(u) = r u^{-r} \int_0^u t^{r-1} f(t)\, dt \qquad (0 < r).$$

Si $\varphi(u)$ est une fonction à variable bornée (c'est-à-dire, dans notre cas, si elle est une intégrale), la série de Fourier de la fonction paire $f(u)$ converge pour $u = 0$, et a $\varphi(+0)$ pour somme.

La démonstration est fort simple. Nous n'avons qu'à remarquer que dans ce cas $\varphi'(u)$ existe, sauf sur un ensemble de mesure nulle.

Par suite

$$f(u) = \varphi(u) + \frac{u\varphi'(u)}{r},$$

les valeurs de $\varphi'(u)$ étant convenablement choisies aux points exceptionnels.

La convergence voulue aura donc lieu, si les séries de Fourier de $\varphi(u)$ et de $u\varphi'(u)$ convergent pour $u = 0$. Il suffit donc que $\varphi(u)$ satisfasse à la condition classique 1°, et $u\varphi'(u)$ à 2°. Mais la première de ces conditions

entraîne la seconde, vu que $\varphi(u)$ étant une fonction à variation bornée, $\varphi'(u)$ est sommable.

Notre théorème est démontré.

Pour $r=1$, nous aurons évidemment la condition de M. de la Vallée Poussin.

3. Nous remarquons que la substitution de $f(x)-C$ pour $f(x)$ dans la définition de $\varphi(u)$ et l'omission du facteur r ne changent en rien le sens du théorème du paragraphe 2. Mais la formulation nouvelle rend le théorème encore applicable pour $r=0$ et montre que, pour cette valeur de r, la condition générale II se réduit à la condition classique 2°. *Ainsi* II *est une suite continue de critères, dont la condition classique* 2° *est le membre initial.*

4. *Notre suite de critères* II *est telle que l'un quelconque de ses membres est compris dans tous les suivants.* Pour le démontrer nous emploierons l'intégration par parties et un simple changement de variable en écrivant

$$\begin{aligned} u^{-r-s}\int_0^u t^{r+s-1}f(t)\,dt &= u^{-r-s}\int_0^u t^s\{t^{r-1}f(t)\}\,dt \\ &= \varphi(u)-\frac{s}{r+s}\int_0^u \varphi(t)\,d\{u^{-r-s}t^{r+s}\} \\ &= \varphi(u)-\frac{s}{r+s}\int_0^1 \varphi(ut)\,dt^{r+s}. \end{aligned}$$

Mais si $\varphi(u)$ est une fonction monotone non décroissante de u, cette dernière intégrale est aussi une fonction monotone non décroissante de u. Il s'ensuit que si $\varphi(u)$ est la différence de deux fonctions monotones, l'intégrale est aussi la différence de deux telles fonctions. Ainsi $\varphi(u)$ étant une fonction à variation bornée, cette propriété subsiste encore, si dans l'expression pour $\varphi(u)$ nous remplaçons r par une quantité plus grande $(r+s)$ quelconque.

5. Il est remarquable que, quoique les deux suites I et II semblent être tout à fait distinctes, *la condition classique* 1°, *qui est le premier membre de la suite* I, *est comprise comme cas particulier dans chaque membre de la suite* II, *sauf dans le membre initial.* Ceci résulte d'un changement de variable pareille à celui employé au paragraphe 4.

6. Si nous avons raison de supposer les deux critères généraux I et II distincts, nous obtiendrons des critères nouveaux, en appliquant l'un des

deux à $\varphi(u)$ et l'autre à $u\varphi'(u)$. Mais s'il y a un critère T, contenant à la fois I et II, nous n'obtiendrons par ce procédé rien de plus général que T.

C'est pour cette raison que l'application des conditions classiques, dans l'ordre inverse de ce que nous avons fait au paragraphe 2, ne conduit à aucune extension. En effet, si $\varphi(u)$ satisfait à la condition 2° et $u\varphi'(u)$ à 1°, nous n'obtiendrons qu'un cas particulier de la condition II, vu que 1° et 2° sont des cas particuliers de II. De même la substitution de la condition de M. de la Vallée Poussin pour une des conditions classiques ne donne rien de nouveau.

7. Comme exemple de l'utilité du paramètre r dans notre critère II, nous citerons le théorème suivant, qui résulte de ma Note du 23 octobre, si l'on fait un choix approprié de r :

La série de Fourier converge si $u^{-n-1} F_{n+1}(u)$ *est une fonction à variation bornée, où*

$$F_{n+1}(u) = \int_0^u F_n(u)\,du$$

et

$$F_1(u) = \int_0^u f(u)\,du.$$

Plus généralement encore on aura des théorèmes correspondants pour les séries dérivées de la série de Fourier.

8. Finalement, il y a lieu de remarquer qu'une théorie analogue existe pour la série alliée de la série de Fourier, et que les considérations exposées dans cette Note et les précédentes s'appliquent avec les modifications convenables aux séries de Fourier de plusieurs variables.

GÉOMÉTRIE. — *Limite d'extensibilité d'un arc de courbe d'allure invariable.* Note (¹) de M. **Michel Petrovitch**, présentée par M. Appell.

Nous dirons qu'un arc de courbe, continu ou brisé, dans l'espace à n dimensions, présente une *allure invariable* par rapport à un système d'axes rectilignes orthogonaux $Ox_1, \ldots, Ox_n$ si, lorsqu'on parcourt l'arc d'une

(¹) Séance du 26 décembre 1916.

extrémité à l'autre dans un sens déterminé, aucune des coordonnées x_i ne change le sens de sa variation, chacune d'elles croissant ou décroissant constamment le long de l'arc.

On peut, et cela d'une infinité de manières, déformer et allonger jusqu'à une certaine limite un arc donné aux extrémités fixées et d'allure invariable, sans que l'allure perde ce caractère d'invariabilité. *De combien se laisse-t-il allonger par une telle déformation?*

En désignant par ε_k l'unité affectée du signe invariable de dx_k le long de l'arc s considéré, on aura

$$s = \int_{(P_0)}^{(P_1)} \sqrt{\Sigma (\varepsilon_k dx_k)^2},$$

P_0 et P_1 désignant les extrémités de l'arc. L'identité

$$n \Sigma (\varepsilon_k dx_k)^2 - (\Sigma \varepsilon_k dx_k)^2 = \frac{1}{2} \Sigma (\varepsilon_i dx_i - \varepsilon_j dx_j)^2$$

fait voir que la valeur du rapport

$$\frac{\Sigma (\varepsilon_k dx_k)^2}{(\Sigma \varepsilon_k dx_k)^2} = \theta^2$$

est toujours comprise entre $\frac{1}{n}$ et 1, ces limites étant atteintes, la première lorsque les différentielles dx_k sont toutes égales entre elles, et la seconde lorsque toutes ces différentielles, sauf une parmi elles, sont nulles.

Il s'ensuit que l'élément d'arc a pour valeur

$$ds = \theta \Sigma \varepsilon_k dx_k,$$

θ étant un facteur compris entre $\frac{1}{\sqrt{n}}$ et 1. Le théorème commun de la moyenne conduit alors au résultat suivant :

La longueur de l'arc s est égale à la somme des valeurs absolues des accroissements que subissent les coordonnées $x_1, \ldots, x_n$ lorsqu'on passe d'une extrémité de l'arc à l'autre, cette somme étant multipliée par un facteur toujours compris entre $\frac{1}{\sqrt{n}}$ et 1.

Déformons maintenant l'arc s sans en changer les extrémités et sans en altérer l'invariabilité d'allure. Les accroissements des x_i à l'extrémité de l'arc étant les mêmes que pour l'arc primitif s, le nouvel arc s' aura pour longueur la somme précédente multipliée par un facteur θ' compris

entre $\frac{1}{\sqrt{n}}$ et 1. L'arc s' est donc au plus $\sqrt{n}$ fois plus long que l'arc s, d'où la proposition suivante :

On peut allonger un arc à allure invariable au plus $\sqrt{n}$ fois sans en altérer l'invariabilité d'allure.

Cette limite d'allongement est effectivement atteinte dans le cas particulier où l'arc s, primitivement réduit à une portion de la droite

$$\varepsilon_1 x_1 + a_1 = \varepsilon_2 x_2 + a_2 = \ldots = \varepsilon_n x_n + a_n \qquad (a_i = \text{const.}),$$

est déformé de manière à se confondre avec la ligne brisée formée de n portions de droites parallèles aux axes des coordonnées et aboutissant aux extrémités de l'arc primitif s (résultante de ces n composantes). L'arc primitif aurait alors pour longueur la valeur absolue de l'accroissement fini de l'une parmi les coordonnées à l'extrémité de l'arc, multiplié par $\sqrt{n}$; pour le nouvel arc la longueur sera ce même accroissement multiplié par n.

En particulier, *on peut allonger l'arc s d'une courbe plane au plus $\sqrt{2} = 1,414213$ fois, et l'arc d'une courbe gauche au plus $\sqrt{3} = 1,732050$ fois sans que son allure cesse d'être invariable.* Ces limites sont effectivement atteintes lorsque l'arc primitif se réduit à une portion d'une droite faisant l'angle de 45° avec chacun des axes des coordonnées et lorsque le nouvel arc se confond avec la ligne brisée aboutissant aux extrémités de cette portion de droite et composée elle-même de portions de droites parallèles aux axes des coordonnées.

Considérons maintenant un arc $s = P_0 P_1$ changeant d'allure un nombre quelconque de fois entre ses extrémités. On peut le décomposer en un nombre limité d'arcs continus ou brisés $P_0 P'$, $P' P''$, $P'' P'''$, ... présentant chacun une allure invariable par rapport au système de coordonnées considéré. *On trouve alors*

$$s = \theta \sum_i \sum_k X_i^k, \qquad \frac{1}{\sqrt{n}} \leq \theta \leq 1,$$

où la double somme est celle des valeurs absolues des accroissements finis de toutes les coordonnées $x_1, \ldots, x_n$ le long des arcs partiels $P_0 P'$, $P' P''$, $P'' P'''$, ... On voit facilement pour quels arcs l'une ou l'autre des limites de θ est effectivement atteinte.

Déformons l'arc s sans en changer les extrémités et sans que le changement d'allure se produise en des points autres que P', P'', P''', ... restant

fixes dans cette déformation. *L'arc s se laisse ainsi allonger au plus $\sqrt{n}$ fois.* Il en est de même lorsque les points caractéristiques P′, P″, P‴, ... se déplacent au cours de la déformation, de manière que la double somme précédente, ne dépendant que des positions de ces points, reste invariable (¹).

On en tire facilement des conséquences relatives aux intégrales finies de la forme

$$\int_a^b \sqrt{f_1(x)^2 + \ldots + f_n(x)^2}\, dx,$$

les f_i étant des fonctions arbitraires de x. L'intégrale se laisse décomposer en une somme de termes

$$\int_\alpha^\beta f_i(x)\, dx,$$

multipliée par un facteur θ toujours compris entre $\frac{1}{\sqrt{n}}$ et 1, les α et β étant ou bien les limites a et b, ou bien les valeurs de x, comprises entre a et b, pour lesquelles une ou plusieurs fonctions f_i changent de signe.

Les considérations précédentes s'étendent à des coordonnées curvilignes et conduisent à des propositions du genre de celles qui précèdent pour les longueurs des arcs des courbes tracées sur une surface. Elles s'appliquent aussi à des problèmes de Mécanique.

THÉORIE DES FONCTIONS. — *Sur une définition des ensembles mesurables B sans nombres transfinis.* Note de M. **M. Souslin**, présentée par M. J. Hadamard.

Je me propose ici d'obtenir une propriété caractéristique pour les ensembles mesurables B et indépendante des nombres transfinis. C'est M. N. Lusin qui m'a guidé dans mes recherches et c'est à lui tout d'abord que je dois des résultats l'idée ci-dessous.

1. *Théorie générale.* — Considérons un système S d'intervalles fermés désignés par la notation générale $\delta_{n_1 n_2 \ldots n_k}$, les entiers k, n_1, n_2, ..., n_k

---

(¹) Il est aussi facile de fixer des limites d'allongement lorsque les points caractéristiques restent constamment sur une courbe, surface, etc. fixe.

prenant toutes les valeurs entières positives :

$$S = \{ \delta_{n_1 n_2 \ldots n_k} \}.$$

Les intervalles du système S forment évidemment une infinité énumérable.

Nous posons maintenant les définitions suivantes. Nous dirons qu'*un point x appartient au système* S s'il existe une suite d'entiers positifs α_1, $\alpha_2, \ldots, \alpha_k, \ldots$ telle que le point x est contenu dans tous les intervalles δ_{α_1}, $\delta_{\alpha_1\alpha_2}, \ldots, \delta_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k}, \ldots$. La réunion de *tous* les points x appartenant au système S constitue l'ensemble E qui est parfaitement déterminé par le système S. Nous dirons que E *appartient au système* S; le système S sera appelé *système déterminant* de l'ensemble E.

Nous appellerons *ensemble* (A) tout ensemble de points qui admet un système déterminant.

Tout système déterminant S est déterminé par une infinité énumérable de conditions; par conséquent, l'ensemble de tous les ensembles (A) a la puissance *du continu*.

2. On trouve immédiatement, pour les ensembles (A), les trois lemmes suivants :

Lemme 1. — *Tout intervalle* (a, b) *est un ensemble* (A).

Lemme 2. — *Soit* E_1, E_2, ... *une infinité énumérable d'ensembles* (A), *leur ensemble-somme* $E = E_1 + E_2 + \ldots$ *est un ensemble* (A).

Lemme 3. — *Soit* E_1, E_2, ... *une infinité énumérable d'ensembles* (A), *leur partie commune* $E = E_1 \cdot E_2 \cdot \ldots$ *est un ensemble* (A).

De là, le théorème fondamental suivant :

Théorème I. — *Tout ensemble mesurable* B *est un ensemble* (A).

Nous avons donc une méthode régulière et uniforme permettant de définir, sans nombres transfinis, tout ensemble de points mesurable B.

3. Une première question se pose avant toutes autres :

Tout ensemble (A) *est-il un ensemble mesurable* B?

On s'assure immédiatement que la question est délicate : s'il existe un exemple d'ensemble (A) qui n'est pas un ensemble mesurable B, il doit être trouvé sans l'axiome de M. Zermelo (le *Principe du Choix arbitraire*),

car toute application de cet axiome à la recherche d'un exemple quelconque amène toujours à une classe d'exemples dont la puissance ($=c^c$) est supérieure à celle du continu; or la classe de tous les ensembles (A) a la puissance ($=c$) du continu.

La question posée admet une solution précise et *négative :* nous avons trouvé, sans utiliser l'axiome de M. Zermelo et les nombres transfinis, un ensemble (A) tel que son complémentaire relativement à l'intervalle (0,1) n'est pas un ensemble (A). Cet ensemble ne peut pas être mesurable B, car l'ensemble complémentaire le serait aussi, ce qui conduirait à une contradiction au théorème I. D'où le théorème suivant :

Théorème II. — *Il existe un ensemble bien défini* (au sens logique et précis du mot *défini*) *qui n'est pas un ensemble mesurable* B.

Enfin, on peut démontrer le théorème suivant qui caractérise les ensembles mesurables B :

Théorème III. — *Si l'ensemble* E *et son complémentaire* CE *sont tous deux des ensembles* (A), *ils sont mesurables* B.

4. *Applications géométriques.* — Soit E un ensemble (A) situé sur l'axe des x dont un système déterminant est $S=\{\delta_{n_1n_2\ldots n_k}\}$. Prenons sur l'axe des y les intervalles $d_{n_1n_2\ldots n_k}$ définis par les inégalités

$$d_{n_1n_2\ldots n_k}=\left[\sum_{i=1}^{i=k}\frac{1}{3^{n_1+n_2+\ldots+n_i}}\leq y\leq\frac{1}{3^{n_1+n_2+\ldots+n_k}}+\sum_{i=1}^{i=k}\frac{1}{3^{n_1+n_2+\ldots+n_i}}\right].$$

Soit $D_{n_1n_2\ldots n_k}$ le rectangle ayant ses côtés parallèles aux axes des coordonnées et dont les projections sur les axes des x et des y sont respectivement $\delta_{n_1n_2\ldots n_k}$ et $d_{n_1n_2\ldots n_k}$. Nous appellerons le rectangle $D_{n_1n_2\ldots n_k}$ à k indices *rectangle de rang k.* Tous les rectangles de rang k forment une infinité énumérable et sont deux à deux sans points communs; le rectangle $D_{n_1n_2\ldots n_kn_{k+1}}$ est contenu dans le rectangle $D_{n_1n_2\ldots n_k}$.

Désignons par Q_k l'ensemble de points formé par la réunion de tous les rectangles de rang k; l'ensemble Q_{k+1} est contenu dans Q_k, donc

$$Q_1>Q_2>\ldots>Q_k>\ldots.$$

Désignons par Q la partie commune à tous les ensembles Q_k,

$$Q=Q_1Q_2\ldots Q_k\ldots.$$

Il est bien évident que Q est un ensemble mesurable B de classe ≤ 1. L'en-

semble donné E est évidemment la projection orthogonale de Q sur l'axe des x. Donc :

THÉORÈME IV. — *Tout ensemble* (A) *est la projection orthogonale d'un ensemble mesurable* B *de classe* ≤ 1.

En vertu du théorème I, nous avons :

THÉORÈME IV'. — *Tout ensemble linéaire mesurable* B *est une projection orthogonale d'un ensemble mesurable* B *de classe* ≤ 1.

De même, d'après le théorème II, nous avons :

THÉORÈME V. — *Il existe, dans le plan, un ensemble mesurable* B *de classe* 1, *tel que sa projection orthogonale sur l'axe des x est un ensemble non mesurable* B.

La projection d'un ensemble mesurable B n'est donc pas toujours mesurable B, contrairement à ce que suppose M. Lebesgue [1] dans la démonstration de son théorème sur les fonctions implicites; cette démonstration doit, par suite, être modifiée.

Toutes les définitions de cette Note sont valables pour les ensembles dans l'espace à n dimensions, ce qui revient au

THÉORÈME. — *Si* E *est un ensemble* (A), *sa projection l'est aussi.*

THÉORIE DES FONCTIONS. — *Sur la classification de M. Baire.* Note de M. N. Lusin, présentée par M. Hadamard.

Dans la Note présente je me propose d'indiquer quelques conséquences des résultats de M. Souslin (voir la Note précédente).

1. *Applications fonctionnelles.* — Remarquons d'abord que tout système déterminant peut être remplacé par un système déterminant $S = \{\delta_{n_1 n_2 \ldots n_k}\}$ qui jouit des propriétés suivantes :

1° Les extrémités de l'intervalle $\delta_{n_1 n_2 \ldots n_k}$ sont des points rationnels;

2° L'intervalle $\delta_{n_1 n_2 \ldots n_k n_{k+1}}$ est contenu dans l'intervalle $\delta_{n_1 n_2 \ldots n_k}$;

3° La longueur de l'intervalle $\delta_{n_1 n_2 \ldots n_k}$ de rang k est inférieure à $\frac{1}{k}$. Nous

---

(1) *Sur les fonctions représentables analytiquement* (*Journal de Mathématiques*, 5e série, t. **10**, 1905, p. 191-192, 195-196).

appellerons *système régulier* tout système déterminant qui possède les propriétés énoncées.

Cela posé, considérons un ensemble (A) quelconque situé sur l'axe des y; désignons par E cet ensemble. Soit $S = \{\delta_{n_1 n_2 \ldots n_k}\}$ un système déterminant régulier de l'ensemble E.

Prenons sur l'axe des x le domaine ($0 \leqq x \leqq 1$). Désignons par $\mathfrak{z}$ l'ensemble des points irrationnels du domaine ($0 \leqq x \leqq 1$). Soit ξ un point de $\mathfrak{z}$, représenté par la fraction continue ($\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k, \ldots$), où les entiers $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ sont les quotients incomplets. Considérons les intervalles $\delta_{\alpha_1}, \delta_{\alpha_1 \alpha_2}, \ldots, \delta_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_k}, \ldots$; ces intervalles étant fermés et en nombre infini, il existe, en vertu des propriétés 2° et 3°, un et un seul point η qui leur est commun. D'après la définition d'un ensemble (A), ce point η est un point de E. Ainsi, à tout point ξ de $\mathfrak{z}$ correspond un et *un seul* point η de E. Réciproquement, à tout point η de E correspond *au moins* un point ξ de $\mathfrak{z}$.

Considérons l'ordonnée η comme une fonction de l'abscisse ξ : $\eta = f(\xi)$. L'ensemble E étant *donné*, la fonction $f(x)$ est définie, *sans l'axiome de M. Zermelo*, en tous les points de $\mathfrak{z}$. D'après la propriété 3°, la fonction $f(x)$ est *continue* en chaque point de $\mathfrak{z}$ par rapport à $\mathfrak{z}$; l'ensemble des valeurs de $f(x)$ sur $\mathfrak{z}$ est l'ensemble donné E. Définissons la valeur de la fonction $f(x)$ pour x rationnel comme le maximum de la fonction $f(x)$ en x par rapport à $\mathfrak{z}$. D'après cela, la fonction $f(x)$ est définie, sans l'axiome de M. Zermelo, en tout point x du domaine ($0 \leqq x \leqq 1$). On voit bien que $f(x)$ est continue (au sens ordinaire) en tout point irrationnel du domaine ($0 \leqq x \leqq 1$); donc, $f(x)$ est une fonction mesurable (B) et de classe 1 de la classification de M. Baire. Les valeurs de $f(x)$ en tous les points rationnels forment, évidemment, une infinité énumérable. De là :

Théorème I. — *Tout ensemble* (A), *à un ensemble énumérable de points près, est l'ensemble des valeurs d'une fonction* $f(x)$ *de classe* 1, *définie dans* ($0 \leqq x \leqq 1$) *et dont les seules discontinuités sont les points rationnels.*

En vertu du théorème I de la Note précédente, nous avons :

Théorème I'. — *Tout ensemble mesurable* (B), *à un ensemble énumérable de points près, est l'ensemble des valeurs d'une fonction* $f(x)$ *de classe* 1, *définie dans* ($0 \leqq x \leqq 1$) *et dont les seules discontinuités sont les points rationnels.*

En vertu du théorème II de la Note précédente, nous avons :

Théorème II. — *Il existe* (sans utiliser l'axiome de M. Zermelo et les nombres transfinis) *une fonction bien définie* (au sens logique et précis du

mot *définie*) *de classe* I, *continue en tout point* x *du domaine* (0,1), *sauf aux points rationnels, telle que l'ensemble de ses valeurs sur* (0,1) *est un ensemble non mesurable* (B).

Corollaire. — *Il existe une série de polynomes* $\sum_{n=1} P_n(x)$, *convergente partout dans* (0,1), *telle que l'ensemble des valeurs de sa somme est un ensemble non mesurable* (B).

Si l'on introduit les nombres transfinis en infinité *énumérable*, on peut supprimer [1] de l'énoncé du théorème I (et I′) les mots *à un ensemble énumérable de points près*. On démontre le corollaire sans employer l'axiome de M. Zermelo, mais il faut employer, pour former effectivement la série de polynomes du corollaire, les nombres transfinis en infinité énumérable (c'est-à-dire ceux qui sont inférieurs à l'un d'eux).

Le théorème I admet une proposition inverse :

Théorème III. — *L'ensemble des valeurs de toute fonction* $f(x)$ *qui rentre dans la classification de M. Baire est un ensemble* (A).

2. *Fonctions implicites*. — Posons la définition suivante : nous dirons qu'un système déterminant $\{\delta_{n_1 n_2 \ldots n_k}\}$ de l'ensemble E est *système d'unicité*, s'il existe, pour tout point x de E, une et *une seule* suite d'entiers positifs α_1, α_2, ..., α_k, ... telle que le point x soit contenu dans tous les intervalles δ_{α_1}, $\delta_{\alpha_1 \alpha_2}$, ..., $\delta_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_k}$, ... Cette définition posée, nous pouvons, en employant une méthode de M. Souslin, démontrer la proposition suivante qui caractérise les ensembles mesurables (B) :

Théorème IV. — *Pour qu'un ensemble* (A) *soit mesurable* (B), *il faut et il suffit qu'il admette un système d'unicité.*

Cette proposition nous permet de démontrer que tous les résultats de M. Lebesgue relatifs à la représentation analytique des fonctions implicites restent intacts; mais les démonstrations sont compliquées et emploient *la totalité* des nombres transfinis de seconde classe.

3. *Les ensembles* (A). — On peut démontrer les théorèmes suivants sur les ensembles (A) :

Théorème V. — *Tout ensemble* (A) *est mesurable* (L).

---

[1] Cette remarque est due à M. Souslin.

Théorème VI. — *Lorsqu'un ensemble* E, *qui est un ensemble* (A) *formé à l'aide de points d'un ensemble parfait* P, *est de seconde catégorie sur* P, *il existe un intervalle contenant des points de* P *et dans lequel le complémentaire de* E *par rapport à* P *est de première catégorie.*

En vertu de ces théorèmes, les ensembles (A) sont utilisables dans la théorie des fonctions (par exemple, dans la théorie d'intégration).

Enfin M. Souslin a démontré que *tout ensemble* (A) *est ou dénombrable, ou bien contient un ensemble parfait.* La puissance des ensembles *complémentaires* des ensembles (A) est inconnue; ces ensembles ne sont pas nécessairement des ensembles (A).

MÉCANIQUE. — *Variation systématique de la valeur de la force vive dans le choc élastique des corps.* Note (¹) de M. L. Hartmann.

Les formules usuelles du choc élastique des corps sont en désaccord avec l'expérience, non seulement dans le cas qui fait l'objet de ma Communication précédente (²), mais aussi quand les masses m et m' qui se rencontrent ont des vitesses V et V', différant toutes deux de zéro.

D'après la théorie classique, en effet, ces masses prennent, après le choc, les vitesses ρ et ρ' données par les expressions

$$\rho = (1 - \mathrm{N})\mathrm{V} + \mathrm{NV'} \qquad \text{et} \qquad \rho' = \mathrm{N}\frac{m}{m'}\mathrm{V} + \left(1 - \mathrm{N}\frac{m}{m'}\right)\mathrm{V'},$$

N désignant le rapport $\frac{2m'}{m + m'}$ et représentant la valeur commune des deux rapports $\frac{\mathrm{V} - \rho}{\mathrm{V} - \mathrm{V'}}$ et $\frac{m'}{m}\frac{\rho' - \mathrm{V'}}{\mathrm{V} - \mathrm{V'}}$.

De son côté, le contrôle expérimental de ces formules, effectué, comme dans les essais antérieurs, avec des règles cylindriques en acier de 12^{mm} de diamètre formant pendules, fait ressortir que, ξ et ξ' étant les vitesses constatées après la séparation des masses, les rapports $\frac{\mathrm{V} - \xi}{\mathrm{V} - \mathrm{V'}}$ et $\frac{m'}{m}\frac{\xi' - \mathrm{V'}}{\mathrm{V} - \mathrm{V'}}$ sont bien égaux entre eux, mais leur valeur est un nombre n, qui est le même que lorsque le cylindre de masse m a la vitesse V — V', l'autre cylindre étant en repos, et qui, par suite, varie avec cette vitesse, en restant cons-

(¹) Séance du 26 décembre 1916.

(²) *Comptes rendus*, t. **163**, 1916, p. 559. Dans cette Note (p. 562, 4e ligne), *au lieu de* initial, *lire* initiale.

tamment inférieur à N, dont il se rapproche d'autant plus que $V - V'$ est plus voisin de zéro.

Les vitesses réelles ξ et ξ' peuvent être, dès lors, exprimées par les relations

$$\xi = (1 - n)V + nV' \qquad \text{et} \qquad \xi' = n\frac{m}{m'}V + \left(1 - n\frac{m}{m'}\right)V',$$

qui diffèrent des expressions théoriques par la substitution de n à N.

Par exemple, avec des cylindres de 300^{mm} et 150^{mm} de longueur, auxquels on imprime des vitesses, égales, pour le premier, à 375 mm : sec et pour le second à

350 325 275 225 175 125 75 25 mm : sec,

le coefficient n, qui, théoriquement, devrait être égal à $\frac{2}{3}$ ou 0,666, dans ces divers cas, a les valeurs moyennes

0,665 0,661 0,655 0,648 0,640 0,631 0,622 0,613,

qui sont sensiblement les mêmes que lorsque le premier cylindre se meut avec les vitesses

25 50 100 150 200 250 300 350 mm : sec,

le second étant en repos.

Les résultats sont analogues quand les cylindres ont respectivement des vitesses, égales, pour l'un, à 100^{mm} par seconde, et, pour l'autre, à

75 50 0 — 50 —100 —150 —200 —250 mm : sec.

Dans ces conditions, la somme des forces vives finales est

$$m\xi^2 + m'\xi'^2 = mV^2 + m'V'^2 - \frac{2n}{N}(N - n)\,m(V - V')^2,$$

c'est-à-dire qu'elle est plus petite que la force vive avant le choc

$$mV^2 + m'V'^2,$$

$N - n$ étant toujours positif et la diminution que celle-ci subit est d'autant plus grande que $V - V'$ est plus considérable.

On arrive ainsi à la conclusion que, dans ce cas encore, la force vive observée présente, par rapport à la force vive initiale, des variations régulières et systématiques, dont la valeur dépend de la différence des vitesses des deux corps.

Cette non-conservation de la force vive se vérifie avec facilité dans un cas particulier : celui de deux cylindres identiques ayant des vitesses égales et opposées $+V$ et $-V$. On constate alors que les cylindres n'ont pas, après le rebondissement, les vitesses $-V$ et $+V$, comme on l'admet actuellement, et que les vitesses obtenues peuvent être mises sous la forme

$$\xi = -(2n-1)V \quad \text{et} \quad \xi' = +(2n-1)V.$$

Ces vitesses sont, par conséquent, plus petites en valeur absolue que les vitesses théoriques $-V$ et $+V$, n étant inférieur à 1, et l'écart est d'autant plus grand que V est plus élevé.

Comme conséquence, la somme des forces vives, qui était primitivement $2mV^2$, prend, après la rencontre, la valeur plus faible $2mV^2(2n-1)^2$, et le rapport de cette dernière force vive à la première décroît de plus en plus à mesure que V augmente.

Je rappellerai, à ce sujet, que Huyghens, pour établir les lois du choc, a supposé précisément que deux masses, pour lesquelles on a $m = m'$ en même temps que $V' = -V$, échangent leurs vitesses, quand elles réagissent par choc l'une sur l'autre; l'une des hypothèses sur lesquelles il a fondé ses déductions ne répond donc pas à la réalité.

En résumé, d'après l'expérience, la somme $mV^2 + m'V'^2$ ne se conserve pas dans le choc élastique des corps, quels que soient V et V′, contrairement à la proposition formulée par Leibnitz.

En ce qui concerne la quantité de mouvement, il y a lieu de remarquer qu'étant données des masses m et m' dont les vitesses sont V et V′ par rapport à la terre, si leurs mouvements viennent à être rapportés à la masse m', on se trouve en présence d'une masse m, qui, ayant la vitesse $V - V'$, rencontre une masse m' en repos, et j'ai signalé, dans la Note du 13 novembre dernier, que, dans ce cas, la quantité de mouvement $m(V - V')$ se conserve d'une manière effective, en se retrouvant dans la somme des quantités de mouvement moyennes existant dans les deux corps au moment du maximum de raccourcissement longitudinal, qui sont, l'une et l'autre, de même signe que $m(V - V')$.

Il en est de même si les mouvements des masses sont rapportés à la masse m, la quantité de mouvement qui se conserve étant alors $m'(V' - V)$.

Par suite, dans le cas général du choc, il y a conservation effective de la quantité de mouvement initiale de chaque corps, évaluée par rapport à l'autre corps considéré comme immobile, et ce résultat est conforme également à la conception de Descartes, convenablement interprétée.

MÉCANIQUE. — *Sur le tracé mécanique de l'hodographe balistique.* Note [1] de M. J. **Olive**, présentée par M. L. Lecornu.

Soient :

v la vitesse du projectile;
θ l'angle d'inclinaison de cette vitesse;
$F(v)$ la valeur absolue de l'accélération due à la résistance de l'air;
c le coefficient balistique;
V l'angle que forme la direction de la vitesse avec celle de l'accélération totale.

L'équation de l'hodographe est

$$\operatorname{tang} V = \frac{\frac{g}{c}\cos\theta}{\frac{g}{c}\sin\theta + F(v)}.$$

En distinguant dans l'échelle des vitesses un nombre suffisant d'intervalles, on peut écrire approximativement

$$F(v) = A + Bv,$$

les coefficients A, B ayant des valeurs constantes dans chaque intervalle. Posons alors

$$\lambda = -\frac{A}{B}, \qquad \mu = \frac{g}{B}.$$

Il vient

$$\operatorname{tang} V = \frac{\frac{\mu}{c}\cos\theta}{\frac{\mu}{c}\sin\theta + v - \lambda}.$$

Ceci montre que la tangente MT à l'hodographe (*fig.* 1) est parallèle à la demi-droite obtenue en portant :

Sur Oy

$$OA = \frac{\mu}{c};$$

sur OM

$$MM' = \lambda.$$

---

(1) Séance du 2 janvier 1917.

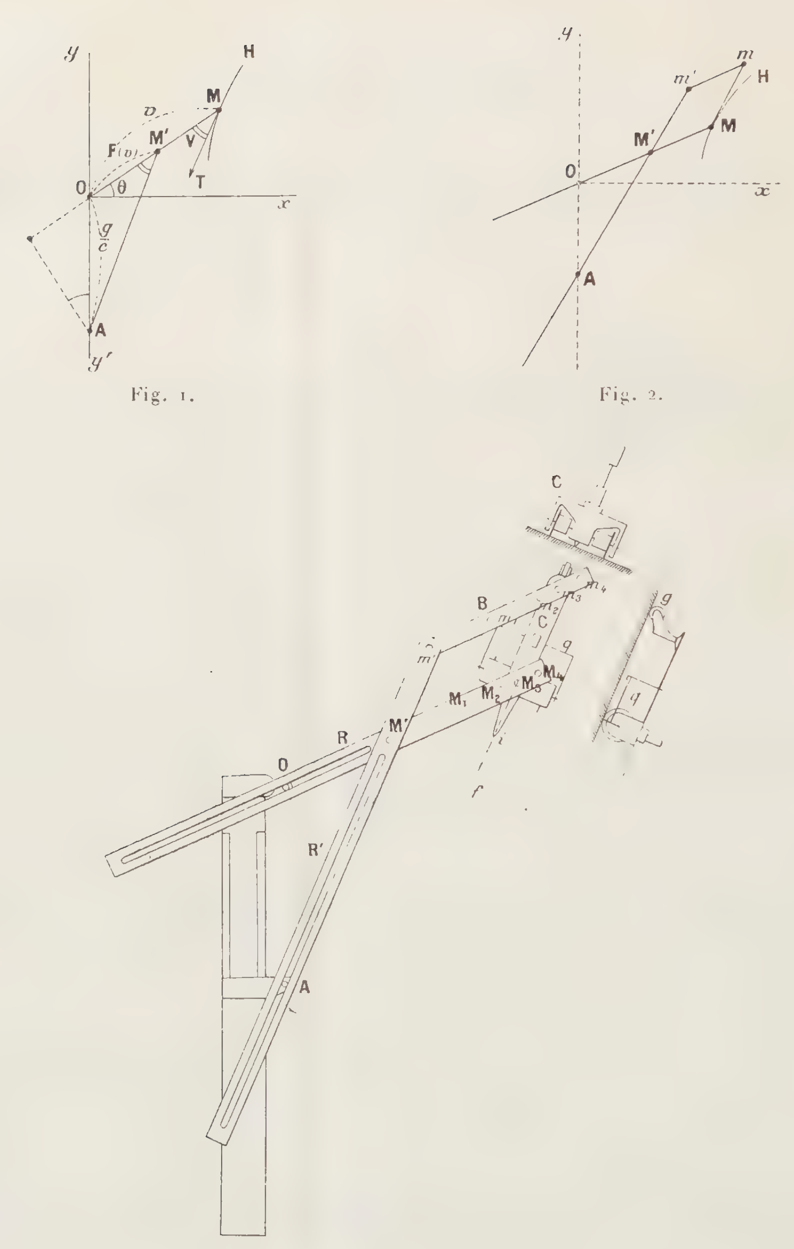


Fig. 1.

Fig. 2.

Fig. 3.

O pivot constituant le pôle de l'hodographe;

A tenon qu'on règle dans chaque intervalle de vitesse suivant le coefficient balistique du projectile employé $\left(OA = \frac{\mu}{c}\right)$;

R, R′ règles coulissantes articulées en M′;

C chariot traceur articulé avec R en des points M_1, M_2, M_3, M_4 qu'on choisit suivant l'intervalle de vitesse parcouru;

B biellette articulée en m' avec R′ et, suivant l'intervalle de vitesse, en m_1, m_2, m_3 ou m_4 avec C;

g galet d'appui monté sur chape pivotante;

q cadre armé de pointes, qui sert à immobiliser le chariot quand on a atteint une limite d'intervalle de vitesse;

f fil de commande qu'on maintient en regard de l'index i.

Dans chacun des intervalles de vitesse, l'hodographe peut donc être décrit par une roulette coupante placée en M et soumise aux liaisons suivantes (*fig.* 2) :

1° Une règle OM pivote autour de O ;

2° La roulette M est montée sur l'un des côtés Mm d'un parallélogramme articulé possédant le côté constant MM';

3° Le côté M'm' de ce parallélogramme passe par un pivot fixe placé en O.

La figure 3 montre la réalisation de l'appareil.

On pourrait imaginer d'autres dispositifs équivalents à celui-là.

L'hodographe étant tracé, il reste, pour obtenir la courbe balistique elle-même, à effectuer les quadratures

$$x = \frac{1}{g}\int v^2\, d\theta, \qquad y = \frac{1}{g}\int v^2 \operatorname{tang}\theta\, d\theta,$$

aisées à réaliser mécaniquement pour chaque intervalle en attribuant à v la valeur constante qui correspond à cet intervalle.

Les calculs pénibles qu'exige la détermination d'une trajectoire se trouvent en définitive remplacés par des opérations rapides.

Signalons la facilité avec laquelle on peut changer les constantes de réglage pour étudier les effets d'une modification de la résistance de l'air. Ceci s'applique notamment :

1° Dans la recherche de la valeur du coefficient balistique c d'après les portées réellement obtenues;

2° Dans le cas où de nouvelles formes de projectiles nécessiteraient une modification de la fonction F(v) et rendraient par suite inutilisables les Tables balistiques actuelles.

PHYSIQUE. — *Sur la réflexion et la réfraction d'ondes isolées à la surface de séparation de deux fluides en repos ou en mouvement.* Note de M. **Ernest Esclangon**, présentée par M. Appell.

Soit xOy le plan de séparation de deux fluides, identiques ou distincts, et animés, l'un par rapport à l'autre, d'un mouvement de translation uniforme. Le cas de l'immobilité relative sera compris dans ce cas général. Nous supposerons le fluide supérieur au repos, le fluide inférieur ($z < 0$) animé d'une translation horizontale de projections α, β. Désignons par a

et a' les vitesses de propagation propres aux petits ébranlements dans chacun des milieux.

Si l'on imagine, dans le fluide inférieur mobile, des axes relatifs Ox_1, Oy_1, entraînés avec le fluide, toute fonction potentielle caractérisant un ébranlement relatif infiniment petit et irrotationnel devra satisfaire à

$$\frac{\partial^2 \psi_1(x_1, y_1, z, t)}{\partial t^2} = a'^2 \Delta\psi_1(x_1, y_1, z, t). \tag{1}$$

Le mouvement d'entraînement étant lui-même irrotationnel, il existe également, vis-à-vis du mouvement absolu, une fonction potentielle $\psi(x, y, z, t)$ et, entre ces deux fonctions, on a la relation

$$\psi_1(x_1, y_1, z, t) = \psi(x, y, z) - \alpha x - \beta y \tag{2}$$

avec

$$x = x_1 + \alpha t, \qquad y = y_1 + \beta t.$$

On en conclut immédiatement que la fonction ψ doit satisfaire à l'équation

$$\alpha^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + 2\alpha\beta \frac{\partial^2 \psi}{\partial x\, \partial y} + \beta^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + 2\alpha \frac{\partial^2 \psi}{\partial x\, \partial t} + 2\beta \frac{\partial^2 \psi}{\partial y\, \partial t} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = a'^2 \Delta\psi. \tag{3}$$

Ceci posé, soit une onde *incidente* plane quelconque dans le milieu supérieur, normale au plan des xz, que nous pouvons représenter, en mettant en évidence l'angle d'incidence θ, par $f(z\cos\theta + x\sin\theta + at)$. L'onde *réfléchie* sera définie de même par $\varphi(-z\cos\theta + x\sin\theta + at)$ et enfin l'onde réfractée par $\psi(\lambda z + x\sin\theta + at)$. Nous poserons pour simplifier $u = x\sin\theta + at$.

Écrivons maintenant que les vitesses normales et les pressions dans les deux fluides sont les mêmes sur la surface de séparation. Nous obtiendrons

$$\cos\theta\,[f'(u) - \varphi'(u)] = \left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)_0 \tag{4}$$

$$\frac{\rho}{\rho'}\,[f'(u) + \varphi'(u)] = \left(\frac{\partial\psi}{\partial u}\right)_0 \tag{5}$$

(pour $z = 0$).

Enfin en exprimant que $\psi(z, u)$ satisfait à (3) il vient

$$\lambda^2 = \frac{(a + \alpha\sin\theta)^2}{a'^2} - \sin^2\theta \tag{6}$$

ou, si l'on veut mettre en évidence l'angle de réfraction θ',

$$\frac{\sin\theta}{\sin\theta'} = \frac{a + \alpha\sin\theta}{a'}. \tag{7}$$

L'indice de réfraction dépend donc de l'incidence θ et de la vitesse relative des deux fluides; mais, alors même que les milieux seraient identiques ($a = a'$), *l'existence d'une vitesse relative entraîne une réflexion et une réfraction* de l'onde.

Les formules (4) et (5) permettent de déterminer quantitativement ces ondes qui sont complémentaires. On en tire

$$\varphi'(u) = \frac{\rho' \cos\theta - \lambda\rho}{\rho' \cos\theta + \lambda\rho} f'(u). \tag{8}$$

$$\psi'(u) = \frac{2\rho\cos\theta}{\rho' \cos\theta + \lambda\rho} f'(u). \tag{9}$$

Supposons que l'onde incidente $f'(u)$ soit *isolée*, c'est-à-dire que la fonction $f'(u)$ soit nulle *sauf* dans un certain intervalle qui est celui de la définition de l'onde. La formule (9) montre que, pour *l'onde réfractée*, la succession des phénomènes en un point donné y est toujours la même que dans l'onde incidente. *L'onde réfractée est ainsi toujours directe.*

Il n'en est pas de même de l'onde réfléchie. Le coefficient $\frac{\rho'\cos\theta - \lambda\rho}{\rho'\cos\theta + \lambda\rho}$ peut être en effet négatif. Dans ces conditions, dans l'onde réfléchie, les phénomènes se succèdent dans le même ordre que dans l'onde incidente, mais avec des *signes contraires. L'onde réfléchie est alors inversée.* Cette circonstance se présentera toujours dans une infinité de directions qui seront délimitées par un cône de directions, toujours réel, correspondant à la nullité du coefficient considéré. Pour les gaz, en effet, on a $a^2\rho = a'^2\rho'$, de sorte que

$$\frac{\rho'\cos\theta - \lambda\rho}{\rho'\cos\theta + \lambda\rho} = \frac{(a^2 - a'^2)(a^2\cos^2\theta - a'^2\sin^2\theta) - 2aa'^2\alpha\sin\theta - a'^2\alpha^2\sin^2\theta}{(a^2\cos\theta + \lambda a'^2)^2}.$$

En particulier, si le faisceau incident est perpendiculaire à la vitesse relative des milieux ($\alpha = 0$), cette quantité s'annule pour $\tang\theta = \frac{a}{a'}$ et, pour cette valeur, λ^2 donné par (6) est bien positif.

Le cône de *réfraction totale* serait de révolution, si les milieux étaient en repos relatif.

Les raisonnements précédents supposent $\lambda^2 > 0$. Dans le cas contraire, il y a *réflexion totale*, et ce cas particulier fort intéressant sera examiné spécialement. On voit, dans tous les cas, que, même si les milieux sont identiques ($a = a'$), il peut y avoir réflexion totale par le seul fait de la vitesse relative. Il suffit que l'une des quantités $\frac{a}{a' - \alpha}$, $-\frac{a}{a' + \alpha}$ soit positive et inférieure à l'unité.

CHIMIE PHYSIQUE. — *Études spectrographiques des minéraux portugais d'uranium et de zirconium.* Note [1] de M. A. **Pereira-Forjaz**, transmise par M. Armand Gautier.

J'ai l'honneur de soumettre à l'Académie le résultat de mon examen spectrographique de quelques minéraux portugais.

Les minéraux d'uranium étudiés appartenaient aux gisements du nord de Portugal; presque tous provenaient de terrains granitiques, quelques-uns ont été extraits des schistes cambriens, archéens ou siluriens.

Nous avons analysé la chalcolite et l'autunite de la mine de Nellas, la chalcolite de la mine de Sabugal.

Les minéraux de zirconium analysés proviennent de la syénite à riebeckite d'Alter Pedroso.

J'ai utilisé pour ces recherches un spectrographe de Pulfrich et Löwe [2].

Pour la détermination des longueurs d'ondes, j'ai employé un spectre de référence, obtenu avec l'*alliage d'Eder* et j'ai fait usage de la formule d'interpolation proposée par Hartmann.

Pour la photographie de l'ultraviolet j'ai employé un prisme de quartz et fluorine et je me suis servi de lentilles condensatrices de quartz pour l'introduction des faisceaux de lumière dans l'appareil.

Pour la recherche du minimum de déviation, des séries de photographies ont été faites avec la même plaque, en déplaçant de demi-degré en demi-degré la tablette qui porte le prisme et la chambre photographique.

J'ai fait usage de plaques panchromatiques de Wratten et Wainwright et de plaques ordinaires sensibilisées avec le *pinachrom* et le *pinacyanol*.

Je me suis servi, comme révélateur, de l'azol. J'ai utilisé surtout les *spectres de dissociation et d'arc*.

Les premiers, selon la méthode de M. de Gramont, étaient obtenus avec des électrodes en platine (disposées en V couché); sur l'une des branches (l'horizontale) était placée la substance en fusion avec du carbonate de lithium.

Les seconds étaient obtenus avec des crayons verticaux, en charbon, de 8^{mm} et 12^{mm} de diamètre.

L'appareil de mesure spécialement employé était un microscope de Zeiss, grand modèle, avec l'objectif de Leitz 1*a* (div. 10), le tube de tirage à 150^{mm}, oculaire micrométrique de Leitz, n° 2.

Pour l'emploi de la formule de Hartmann

$$\lambda = \lambda_0 + \frac{C}{s_0 - s},$$

---

(1) Séance du 26 décembre 1916.

(2) C. Pulfrich, *Ueber eine neue Spectroscopconstruction* (*Zeitschrift für Instrumentenkunde*, t. 14, 1894, p. 354-363, et *Astrophysical Journal*, Chicago, t. 1, 1895, p. 335-349).

j'ai utilisé les logarithmes et j'ai déterminé pour chaque fraction considérée du spectre (jamais supérieure à 200 angströms) les constantes s_0, λ_0 et $\log C$.

Pour l'identification des raies j'ai employé les Tables de Marshall Watts, Kayser, Pollok, Stanley et de Gramont.

Voici, résumés en quelques lignes, les résultats de ce long travail :

Conclusions. — 1. La composition chimique qualitative probable de la chalcolite (ou tobernite) de Sabugal est : P, O, U, Cu, Ca, V, Al, Fe, Ra, Ba, Pb, Mn, Mg, Tl, As, Sn et Bi.

2. La composition chimique qualitative probable de la chalcolite de Nellas est : P, O, Cu, Ca, U, Al, V, Fe, Ra, Ba, Pb, Mn, Zn, As, Sn, Bi, Mg et Tl.

3. La composition chimique qualitative de l'autunite de Nellas est : P, O, Ca, Cu, U, Al, V, Fe, Pb, Mn, As, Sn, Bi, Mg et Tl.

4. La composition chimique qualitative probable du zircon d'Alter Pedroso est : Si, O, Zr, Ca, Al, Fe, Th, Ti, Mg, Sn, Bi et Cu.

5. Nous attribuons à la raie 4682,4 angströms du radium une sensibilité plus grande que celle de la raie la plus intense, 3814,6 angströms.

6. La raie 4739,5 du zirconium ne semble pas avoir une grande sensibilité.

7. La carnotite accompagne l'autunite et la chalcolite dans la région radio-uranifère du Portugal.

8. D'autres minéraux d'uranium existent associés à la chalcolite et à l'autunite : la walpurgite, la trögérite et la zeunérite.

GÉOLOGIE. — *Sur la Géologie de l'île d'Ibiza (Baléares).* Note [1] de M. **Paul Fallot**.

L'île d'Ibiza s'allonge du Sud-Ouest au Nord-Est sur 37^{km} à 40^{km} dans l'intervalle qui sépare le promontoire de Denia de Majorque. Topographiquement, elle se décompose en deux groupes montagneux; l'un au Sud-Ouest avec les sommets du Pez, du Sirer et de l'Atalayasa (475^{m}), l'autre plus important en surface et recoupé de vallées d'alluvions. Ces deux régions sont séparées par une large dépression plaquée de Quater-

(1) Séance du 26 décembre 1916.

naire que suit la route d'Ibiza à S. Antonio et qui culmine à 130^{m} au col de S. Rafael.

Elles sont composées de plusieurs *séries tectoniques* superposées et gauchies, dont l'allure générale semble indiquer qu'elles ont été poussées du Sud-Est. Ce sont de haut en bas les séries *d'Ibiza*, de *Sirer-Rey* et d'*Eubarca*.

1. *Série d'Ibiza.* — La zone qui borde la côte sud-est de l'île comporte du Trias, inférieur et supérieur, du Tithonique (à faune oxfordienne remaniée), du Néocomien en calcaires lithographiques lités, du Crétacé moyen marneux, montant peut-être jusqu'au Cénomanien (Caleta de S. Vicente).

La meilleure coupe en est donnée, par les massifs entourant S. Vicente. La Punta Grossa est constituée par la série Trias-Crétacé d'un flanc normal dont la continuation vers le Nord-Ouest forme les sommets des P. Caragol et Clapé. Le flanc normal s'élève et devient virtuel à l'Atalaya S. Vicente constituée par le flanc renversé correspondant.

Ce pli couché se redresse contre les puissants poudingues miocènes du P. Rey et les recouvre, plus au Nord-Ouest, au P. Masson, de deux témoins importants. Des synclinaux écrasés à la Caleta, au pied du Rey et la répétition d'assises triasiques dans les témoins du P. Masson, montrent que la série charriée d'Ibiza comporte, ici, des digitations.

Cette série se suit par les massifs intermédiaires de Ribas, Fita, Llibrell, Jésus, la colline d'Ibiza, jusqu'à l'extrémité sud-est de l'île, montrant tantôt son ossature de dolomies triasiques puissantes (S. Carlos), tantôt des éléments plus ou moins écrasés des plis couchés qui l'accidentent (Ribas, Llibrell, Falco, Yondal). Mais son contact avec la série Sirer-Rey est partiellement voilé dans la région médiane de l'île par une croûte de Quaternaire. A l'extrémité opposée au Rey la série d'Ibiza chevauche de nouveau nettement le Miocène dans le massif du P. Sirer. Mais au lieu que le pli couché supérieur soit séparé de la série Sirer-Rey par une digitation à Trias développé, comme au nord-est de l'île, les calcaires lithographiques reposent sur le poudingue par l'intermédiaire d'un calcaire ivoirin écrasé, peut-être aussi néocomien que l'on retrouve dans la même position, plus à l'Ouest, dans l'Atalayasa.

La ligne de contact anormal passe au nord de la Sierra-Caravera, contourne le P. Miquel (sommet néocomien, base miocène), prend en sautoir les flancs sud-ouest et nord-est du Sirer, rentre vers le Sud dans la vallée entre le Sirer et le Pez, suit les flancs nord-ouest et nord de cette montagne pour disparaître sous le Marès dans la vallée du torrent de Funas. Le massif de Beniferri appartient au Trias et au Miocène [1] de la série Sirer-Rey qui s'enfonce sous l'écaille d'Ibiza dans le flanc nord-est de la Sierra de Rafal Trobat.

L'évaluation de l'amplitude du chevauchement de la série Sirer-Rey par celle d'Ibiza est difficile. Le long de la côte de S. Carlos, de Cala Nova au Cabo Roig, des débris écrasés de Miocène semblent supporter le Trias. Un pointement vraisemblablement néogène situé entre le P. Valls et le Cabo Roig au bord de la mer pourra

---

(1) A S'Coll le Miocène contient des couches à plantes.

démontrer cette superposition. Ce fait admis, et le Miocène écrasé étant identifié à celui du P. Rey, le charriage atteindrait 8km jusqu'au P. Masson. Ce chiffre serait porté à 10, si un témoin douteux de Trias qui couronne l'Atalaya S. Juan était attribué à l'écaille d'Ibiza.

II. *Série Sirer-Rey.* — Même composition stratigraphique que dans la précédente, sauf que l'Urgonien réduit dans la série d'Ibiza est, ici, plus développé.

Apparaît sous l'écaille d'Ibiza, au Rey, au Capita, au Masson, occupant toute la surface nord de l'île jusqu'à la côte où elle est recouverte, transgressivement, sans doute et sous une couverture de « Marès » qui empêche l'observation par des assises dans lesquelles les auteurs citent le *Cerithium bidentatum*, mais qui peuvent être d'âge beaucoup plus récent.

Au Sud-Ouest, cette même série dont on a vu le contact avec l'écaille d'Ibiza participe avec un Miocène très développé, mais à éléments plus petits que dans le Nord, à l'architecture de la base du Pez et du Sirer, du sommet du Raco et de l'Atalayasa de S. José, sous laquelle elle sort pendant au Sud-Est, pour former de ses assises crétacées, plus au Nord-Ouest, les sommets de la barre rocheuse de las Rocas Altas.

La série Sirer-Rey, comme celle d'Ibiza, est mal individualisée dans la dépression médiane de l'île. Le Fornon et les masses triasiques et miocènes entre S. Rafael et S. Gertrudis semblent pourtant y remédier.

MINÉRALOGIE. — *L'orientation des liquides anisotropes sur les clivages des cristaux.* Note [1] de M. F. **Grandjean**, présentée par M. L. de Launay.

Dans un travail récent [2] j'ai signalé plusieurs exemples d'orientation et j'ai montré que cette propriété, par son caractère général, se séparait nettement de celle que peut avoir un cristal lorsqu'il forme avec un autre un groupement défini. De nouveaux cas rencontrés en poursuivant cette étude permettent de différencier plus profondément les deux sortes d'orientation : celle des liquides anisotropes est une propriété continue du cristal, pour un clivage déterminé.

Appelons T_1 la température de fusion anisotrope d'un corps, T_2 celle de fusion isotrope. Dans l'intervalle $T_1 T_2$ il peut arriver que la direction du liquide, au contact du clivage, ne varie pas sensiblement : alors elle coïncide

[1] Séance du 2 janvier 1916.

[2] F. Grandjean, *L'orientation des liquides anisotropes sur les cristaux* (*Bulletin de la Société française de Minéralogie*, t. 39, et *Comptes rendus*, t. 163, 1916, p. 394.)

(pour tous les exemples connus jusqu'ici) avec la trace d'un plan de symétrie ou de pseudosymétrie normal au clivage, ou bien elle est perpendiculaire à cette trace; mais il peut arriver également que la direction du liquide varie d'une manière continue, d'un angle notable, parfois très grand. Je citerai trois exemples pour lesquels il est particulièrement facile de constater et d'étudier cette variation.

L'anisaldazine sur un clivage $p(001)$ de sel gemme donne des plages orientées de telle manière que la section principale de plus grand indice (axe optique) fasse un angle de 10° environ avec l'arête du cube. L'angle est de 7° à 8° à la température T_1 et de 11° à 12° à la température T_2. Pour 20° de température la rotation est de 3° à 4°, toujours dans le sens d'un rapprochement de l'arête du cube quand on passe de T_1 à T_2. Cet exemple suffirait à montrer que l'orientation ne se fait pas suivant une rangée puisque les rangées d'un cristal cubique ont des directions invariables.

Le *p*-azoxyanisol donne, sur le clivage p (001) du talc, six orientations dont les sections principales de plus petit indice sont voisines des stries à 60° que présente toujours ce clivage. J'appellerai α l'angle que fait une section principale avec la strie la plus voisine en direction. Les écarts α se disposent de part et d'autre des stries, de sorte qu'ils forment six orientations différentes. Les plages sont grandes, à limites nettes et simples; leurs écarts sont parfaitement déterminés, par exemple à la température T_1 quand on fait fondre l'azoxyanisol pour la première fois; mais ils ne sont pas les mêmes pour toutes les plages d'une préparation, ou pour des préparations différentes. Ils varient aussi avec la température. Dans mes essais, l'écart moyen était de 3° à T_1; de 6° à T_2. La rotation était donc de 3° en moyenne et elle s'éloignait rarement de cette valeur; elle se faisait toujours dans le sens d'une augmentation de α. Les écarts correspondant aux diverses plages étaient comprises entre 0° et 6° à la température T_1; entre 2° et 10° à la température T_2.

Le *p*-azoxyanisolphénétol, sur le même clivage, se comporte d'une manière analogue, mais avec des variations beaucoup plus accentuées. Ce sont les sections principales de plus grand indice (dirigées suivant l'axe optique) qui sont voisines des stries. En rapportant chacune d'elles à la strie la plus voisine en direction et en appelant α l'angle qu'elle fait avec cette strie, on constate qu'à la température T_1 les écarts α peuvent avoir toutes les valeurs possibles. Toutefois ils n'ont jamais été inférieurs à 8°. A la température T_2 ils sont petits, compris entre 0° et 9°. La rotation de l'axe optique, dans l'intervalle $T_1 T_2$ (56° de température) est considérable.

Elle a toujours dépassé 10° dans mes essais et fréquemment atteint 17° et 18°, toujours dans le sens d'une diminution de α lorsqu'on chauffe. Si l'on élève et abaisse un grand nombre de fois la température de T_1 à T_2, et inversement, et qu'on mesure chaque fois la rotation, on voit cette dernière diminuer progressivement et finir par s'annuler. La plage est alors fixée dans une position voisine de son écart à la température T_2. On arrive au même résultat en la chauffant pendant quelque temps à la température T_2. Ainsi la propriété d'orientation ne serait pas réversible; elle rappellerait les phénomènes d'hystérésis des corps magnétiques. Il ne faut pas oublier cependant que cela peut aussi résulter d'une altération du liquide, lequel changerait en même temps de propriétés.

Dans ces trois exemples les déformations du réseau cristallin, quand on passe du T_1 à T_2, sont nulles ou extrêmement faibles. Les rangées ne changent pas sensiblement de direction. Au contraire les orientations des plages liquides varient beaucoup. Elles ne peuvent donc se faire suivant des rangées. La propriété d'orientation d'un liquide anisotrope sur un clivage déterminé n'est pas une propriété réticulaire.

GÉOLOGIE. — *Exploration géologique de la partie du Yun-nan comprise entre la frontière tonkinoise, le Kwang-si et le Kwéi-tchéou.* Note [1] de M. **J. Deprat**, présentée par M. H. Douvillé.

Pendant l'année 1916 j'ai pu m'engager dans la région chinoise comprise entre Pé-sé (Po-so-t'ing), Kwang-nan-fou et la frontière tonkinoise durant une campagne d'exploration de quatre mois. J'ai pu faire des observations et des récoltes très fructueuses dans cette partie du Yun-nan prolongeant au nord le Kwang-si et comprise entre le Tonkin et le Kwéi-tchéou. Dans un compte rendu précédent (11 décembre 1916), j'ai déjà sommairement décrit la magnifique série cambrienne développée dans cette région totalement inconnue au point de vue géologique et géographique.

La série cambrienne puissante de 8000^m est prolongée verticalement *sans aucune interruption* par l'Ordovicien épais de 2500^m environ que surmonte un Gothlandien, généralement incomplet par suite de l'érosion antéouralienne et atteignant 1200^m environ. Cette énorme série, fossilifère

---

[1] Séance du 26 décembre 1916.

du haut en bas, n'est interrompue nulle part, par des lacunes ou des transgressions; pas un lit de poudingue ne s'y observe. Un résultat important de ces nouvelles recherches, c'est que j'ai retrouvé là, *en succession normale et riches en fossiles*, tous les horizons paléozoïques tonkinois observés ailleurs et parfois dans des conditions tectoniques qui avaient rendu difficile ou imprécis leur classement rigoureux, de sorte que nous possédons maintenant une série-étalon précise qui sera du plus grand secours pour l'étude des zones bouleversées par les accidents tectoniques. Je ne veux envisager dans ce compte rendu que l'extension géographique de ces terrains dans la nouvelle région que je viens d'étudier; je laisse de côté la description stratigraphique des nombreux horizons ordoviciens et gothlandiens.

En principe l'Ordovicien prolonge partout le Cambrien par transitions insensibles, les couches cambriennes à *Anomocare megalurus* passant à des grès et calcaires à Ostracodermes. Ces derniers sont surmontés en série normale par des couches à *Trinucleus ornatus* et *Calymene* du groupe des Calymènes ordoviciens de Bretagne avec des schistes à Orthocères. L'Ordovicien moyen supporte une grosse masse de schistes et de grès à grands Lamellibranches (*Goniophora*, etc.) et Brachiopodes (*Orthis*, *Chonetes*, etc.), faune qui sera prochainement décrite. Cet Ordovicien supérieur passe aux épaisses masses de schistes et de marnes à *Sp. tonkinensis*, caractérisées par les espèces que j'ai signalées l'an dernier au Dong-quan : *S. tonkinensis* Mans., *S. dongvanensis* Mans., *Dinorthis annamitica* Mans., *Pt. mieleensis* Mans. J'ai découvert cette année *au-dessus* de ces couches et passant insensiblement à elles, une série *riche en Calymènes* siluriens, accompagnés d'une faune nombreuse de *Calcéoles*, ce qui en augmente encore l'intérêt. Cette série est recouverte par des couches avec une faune caractéristique de *Tentaculites*.

Dans la série à Calymènes et Calcéoles apparaissent des lentilles à polypiers gothlandiens, espèces classiques; ces lentilles augmentant d'importance peu à peu, on atteint au-dessus des couches à *Tentaculites* la puissante série des calcaires gothlandiens à polypiers *F. gothlandica*, *F. Forbesi*, *H. interstincta*, etc.), qui joue au point de vue du relief un rôle important. Le Gothlandien se termine par une grande série schisteuse.

Toute cette succession de terrains est plissée en plis de grande envergure, sans dislocations ni écrasements, donnant d'immenses coupes continues du plus grand intérêt. Le dernier terme est l'Ouralien calcaire, contenant

partout la belle faune que j'ai décrite au Dong-quan [1] l'an dernier. Il est toujours, ici encore, *transgressif* sur les termes plus anciens, recoupant indifféremment des horizons cambriens, ordoviciens ou gothlandiens. Aucune trace de Dévonien; le Gothlandien supérieur même manque parfois, enlevé par l'érosion antéouralienne, comme je l'ai déjà signalé [1]. L'Ouralien, dans toute cette région, s'est manifestement déposé sur des terrains très plissés et plus tard fut repris lui-même par la phase himalayenne. Il forme de longs synclinaux (synclinal de Mou-yang, etc.) pincés dans les autres terrains et complètement discordants avec ces derniers; l'importance géographique de ces calcaires est considérable.

J'ai trouvé dans cette région l'entière confirmation des vues que j'ai exposées précédemment sur l'allure du faisceau des plis du Kwang-si. Les axes des plis dirigés Nord-Ouest dans la région tonkinoise Coc-Pan, Dong-van, Yen-minh, et au Kwang-si, s'incurvent peu à peu vers le Nord, puis passent franchement au Nord-Est dans la région de Li-ta et de Kwang-nan-fou, moulant ainsi l'extrémité de l'élément ancien chinois sud-oriental; cette région, d'autre part, est enveloppée extérieurement par l'arc des nappes préyunnanaises tel que je l'ai défini précédemment.

Nulle part on n'observe de terrain plus jeune que l'Ouralien. Le Trias fait totalement défaut ainsi que le Permien lui-même; la puissante érosion due aux mouvements épirogéniques successifs pliocènes, pléistocènes et récents a tout supprimé.

J'ai trouvé dans cette région chinoise la continuation complète des cycles d'érosion que j'ai décrits précédemment. Elle forme un immense plateau, reste de la pénéplaine du cycle de Tsouéi-wéi-chan, atteignant une altitude moyenne de 1400^{m}, portant des croupes ou des pitons d'allure sénile élevés de 1700^{m} à 1800^{m}, d'altitude égale, monotones; ce plateau est entaillé par les jeunes vallées sauvages et extrêmement profondes du haut Song Nho-qué, du haut Song Gam et des affluents du haut Iou-kiang. Je reviendrai sur ces points qui intéressent spécialement la géographie physique.

---

(1) Voir : *La série stratigraphique dans le Nord-Tonkin* (*Comptes rendus*, t. 162, 1916, p. 254); *Sur l'existence d'un ridement d'âge paléozoïque entre le Yun-nan et le Tonkin* (*Comptes rendus*, t. 162, 1916, p. 335); *Études géologiques sur la région septentrionale du Haut-Tonkin* (*Mém. Serv. Géol. Indochine*, vol. 4, fasc. 4, 1915, p. 115 et suiv.).

GÉOLOGIE. — *Le substratum du massif volcanique du Mont-Dore, ses zones effondrées et ses vallées prévolcaniques.* Note de M. **Ph. Glangeaud**, présentée par M. Pierre Termier.

Le substratum du massif volcanique du Mont-Dore n'a fait l'objet que de quelques observations de Lecoq et de Michel Lévy. On ne connaissait jusqu'ici aucune de ses *dislocations*, sauf celle de La Bourboule, inexactement indiquée, ni aucune de ses *vallées prévolcaniques*. Ces facteurs ont cependant influé dans une très large mesure sur la *distribution des centres et des produits volcaniques*, sur leur *genèse*, sur la *direction* et la *position des coulées*, des *filons* et par suite sur la *topographie* définitive du massif volcanique.

Le substratum n'apparaît, dans l'intérieur du massif, que dans les vallées, d'origine surtout glaciaire, qui l'entaillent profondément.

I. Dans son ensemble, le relief volcanique recouvre un *grand dôme granitique* d'altitude moyenne de 1100^m, s'étendant principalement au Nord, à l'Est et à l'Ouest, tandis que les *gneiss* affleurent au pourtour (au Sud-Est, au Sud et au Sud-Ouest) et qu'une bande importante de gneiss et de *micaschistes* de direction Nord-Est longe le versant Nord-Ouest.

Au Sud, les terrains archéens (gneiss et gneiss à cordiérite) sont relevés jusqu'à 1200^m et vont se relier à ceux qui forment le substratum du Cézallier dont l'altitude est plus grande (1300^m). Au nord-est du lac Chambon, à Ceyssat, existent de larges lambeaux de schistes variés, de cornes, etc., d'âge indéterminé (cambro-dévonien) pénétrés d'intrusions granitiques. Enfin, à la périphérie Est, Nord et Nord-Ouest et en contre-bas, s'étendent des *argiles sableuses oligocènes* recouvrant indifféremment toutes les formations précédentes et se rattachant aux dépôts du même âge de la Limagne, du bassin d'Olby et de la longue traînée superposée au sillon houiller, Mauriac, Bort, Messeix, Saint-Éloy.

Les coulées de lave sont descendues dans les dépressions oligocènes ou dans les vallées prévolcaniques creusées dans le complexe précédent à 780^m au Nord (environ d'Olby), à moins de 700^m à l'Est (Le Cheix), à 800^m à l'Ouest (Tauves), tandis qu'au Sud, elles se tiennent à une altitude moyenne de près de 1100^m.

II. Toutes les formations prévolcaniques sont découpées par des fractures dont le *dessin général* est le même que celui des régions voisines et se

traduit sous la forme de compartiments différemment effondrés les uns par rapport aux autres.

Les failles du versant oriental du massif, de direction générale Nord-Sud, comme celles de la Limagne, dont elles contribuent à former une partie du cadre, sont d'âge exclusivement miocène, tandis que les fractures du versant occidental et septentrional, de direction générale Nord-Est, Sud-Ouest, sont en connexion avec les dislocations post-hercyniennes de la grande zone carbonifère disloquée du Massif central. Ces dernières failles, d'âge permo-triasique, ont souvent rejoué au Miocène et au Pliocène et ont été transformées parfois en fractures volcaniques.

Voici la succession des compartiments que j'ai observés du Nord-Ouest ou de l'Ouest à l'Est.

1° *Le compartiment archéen effondré*, entre le dôme granitique de Banson et celui du massif du Mont-Dore, dont l'axe est sensiblement jalonné par le cours moyen et inférieur de la Miouse. Ce voussoir est limité à l'Est par les rochers granitiques de Châteauneuf et par les localités de Trador, Rochefort, Saint-Martin et Polagnat. Il comprend le *bassin permien* disloqué de Saint-Sauve, plus étendu qu'on le supposait (7^{km}), car il se prolonge jusqu'à *Laqueuille*. L'Oligocène descend à 700^{m} d'altitude dans ce compartiment, qui se continue au Sud, au delà de Tauves.

2° *Le compartiment granitique exhaussé*, Murat le Quaire, Banne d'Ordanche, Orcival dans lequel le granite affleure à plus de 1050^{m} à l'ouest de la Roche Tuilière et à 1040^{m} au sud-ouest de La Bourboule. L'Oligocène y atteint 950^{m} à Trador près de Laqueuille, où j'ai découvert un lambeau important de cette formation.

A l'est de ce voussoir, le granite s'effondre brusquement de plus de 300^{m} en deux échelons, le long de deux failles parallèles Nord-Est, que j'appellerai *failles de la Bourboule*. Ces deux failles distantes de 500^{m} se traduisent par *deux escarpements* avec miroirs de faille remarquables, contre lesquels butent les cinérites. La plus occidentale de ces failles passe à l'ouest de Fouhet, l'abattoir et se dirige un peu à l'est de Murat le Quaire; la faille orientale que Michel Lévy avait signalée traverse la ville de La Bourboule et laisse en relief la « colline granitique des Fées » au pied de laquelle émergent les célèbres sources arsenicales de La Bourboule (Choussy et Perrière). La lèvre affaissée de cette faille descend à moins de 700^{m} d'altitude, sous la Dordogne où elle est masquée par 160^{m} de cinérites, mais elle a été reconnue dans les travaux de la Source Fenestre.

Cette *faille hydrothermale* se prolonge si rigoureusement en direction par le centre éruptif de la Banne d'Ordanche, les six volcans qui avoisinent ce centre au Nord-Est et au Sud-Ouest sont *alignés* si nettement sur son prolongement, *toute la topographie volcanique* de ce territoire s'ordonne si bien (comme je le montrerai ailleurs) autour de cette ligne qu'il me paraît évident de la considérer aussi comme une *fracture volcanique remarquable*, comparable comme amplitude à la grande faille bordière occidentale de la Limagne, également volcanique et hydrothermale.

3° Cette fracture limite à l'Est un *territoire effondré* s'étendant jusqu'au lac de Guéry sur l'emplacement du ruisseau de Guéry, de la vallée de la Dordogne et vraisemblablement jusqu'au Sancy. (Je n'ai pas trouvé traces de la faille Ouest-Est signalée par Michel Lévy.) Les travaux de la source Croizat, près du Mont-Dore, ceux du Mont-Dore même, n'ont pas rencontré le substratum à 860^m et à 900^m de profondeur, tandis que le granite affleure brusquement à 1160^m près du Suquet de Claude et à 1140^m aux Monaux. Au sud de ce dernier point on observe un escarpement de faille de 60^m contre lequel viennent buter des cinérites et des coulées trachytiques, jusqu'ici inconnues.

Il existait donc antérieurement aux éruptions des Monts-Dore sur l'emplacement compris entre la Banne d'Ordanche, le lac de Guéry et le Sancy, dans le grand dôme de granite signalé plus haut, une *dépression* de plus de 100^{km^2}, *d'origine tectonique*, accentuée peut-être par l'érosion, culminée par des hauteurs également granitiques :

C'est sur les bords et à l'intérieur de ce territoire, que se trouvent *presque tous les volcans importants du massif;* c'est là qu'eurent lieu les *éruptions les plus anciennes*, là qu'on observe le maximum de *produits de projections* et *de coulées* (plus de 1000^m d'épaisseur); c'est aussi la seule région où l'on constate la *convergence* des *coulées* des quatre centres volcaniques du Mont-Dore (coulées nord du Sancy, coulées sud de la Banne d'Ordanche, coulées sud-ouest de l'Aiguiller, coulées ouest du massif adventif). Toutes les *sources thermales* du Mont-Dore, de La Bourboule, de Chaudefour *émergent* également dans cette *zone de dislocations et de remblayage* volcanique que les glaciers ont singulièrement façonnée.

4° A l'est de ce territoire effondré, le long de la faille des Monaux, se dresse le compartiment principalement granitique surélevé de Montmie, Surain, lac Chambon, recouvert d'une faible épaisseur de produits volcaniques, territoire limité par la *faille de Varennes* que j'ai fait récemment

connaître ([1]), à l'est de laquelle s'accumulent sur plus de 200^m les premiers sédiments effondrés de la Limagne constituant.

5° Un nouveau *compartiment* formé uniquement par l'Oligocène, sur lequel allaient s'édifier au Pliocène et au Quaternaire une série de volcans importants (volcans du Saut de la Pucelle, de Maisse, de Jonas, du Tartaret, etc.). Ce bloc oligocène est enfoncé de plus de 200^m entre le compartiment granitique du Chambon et celui de Saint-Nectaire, limité par des failles étudiées par Michel Lévy et M. Giraud (voir Feuille géologique de Clermont-Ferrand).

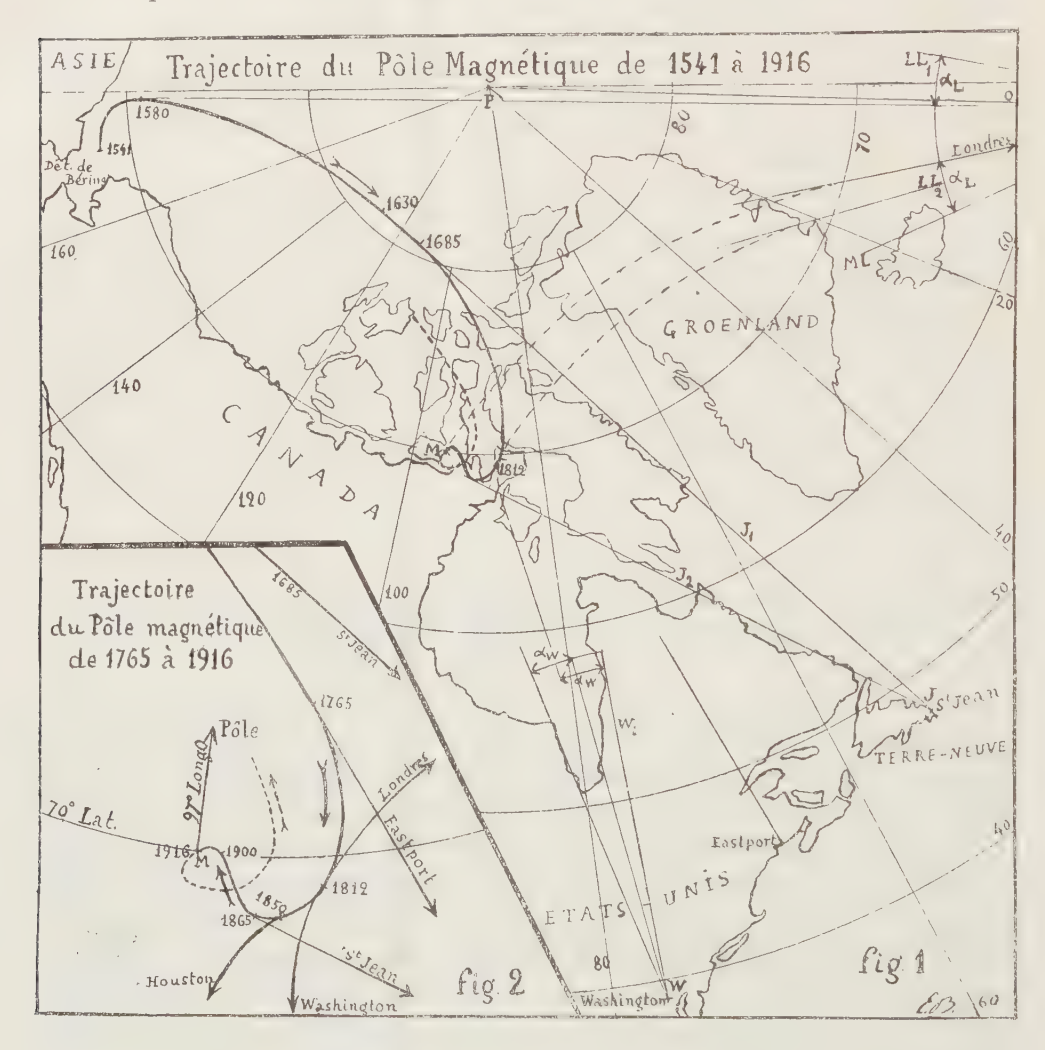
6° En dehors de ce *compartimentage*, la partie visible du substratum des Monts-Dore présente des vallées *prévolcaniques*, qui furent remblayées par les produits des volcans de cette région. Ces vallées ont été partiellement exhumées par l'érosion torrentielle et glaciaire, et elles offrent aujourd'hui des *versants* presque toujours *dissymétriques* aux points de vue *topographique et géologique*, et chronologiquement différents (vallées de la Couze Pavin entre le Pavin et le Cheix, de la Couze de Montcineyre entre Compains et le Valbeleix, du Taraffet entre Picherande et Saint-Donat, de la Mortagne, etc.).

GÉOPHYSIQUE. — *Tracé provisoire de la courbe décrite par le Pôle magnétique boréal depuis* 1541. Note de M. **Émile Belot**, présentée par M. Bigourdan.

Le département de Magnétisme terrestre de l'Institut Carnegie vient de publier ([2]) les courbes donnant la variation séculaire de la déclinaison depuis 1580. Les recherches de M. Camille Flammarion ont permis de trouver la déclinaison à Paris jusqu'en 1541. M. Bauer constate que pour chaque station d'Angleterre et des États-Unis « l'intervalle de temps entre les positions extrêmes du compas pose des problèmes très compliqués », car cet intervalle de plus de deux siècles pour Londres, tombe à 130 ans pour Saint-Jean (Terre-Neuve) et à 50 ans pour Houston (Texas), tandis que le mouvement angulaire annuel, très variable pour chaque station, semble défier toute formule.

([1]) *Comptes rendus*, t. 162, 1916, p. 257.
([2]) L. Bauer, *The work done in the field of terrestrial magnetism*. Washington, 1916.

On peut résoudre ces difficultés apparentes en construisant la *courbe réelle* décrite par le pôle magnétique M au moyen de ses tangentes déduites des courbes de déclinaison. Projetons sur le plan tangent au Pôle Nord P l'Amérique du Nord en conservant l'équidistance des parallèles (*fig.* 1) et



considérons trois stations : Londres, Saint-Jean et Washington. Dans le triangle sphérique rectangle en P formé par le méridien de la station de latitude λ, le méridien perpendiculaire en P et le grand cercle côté de l'angle D, on a

$$\tang d = \cos\lambda \tang D.$$

En portant les arcs *d* sur la carte dans une direction normale au méridien de chaque station, on aura avec une approximation suffisante la projection des côtés des angles D. Ainsi LL_1, LL_2 correspondent aux valeurs limites 11° Est et 24° Ouest pour L; JJ_1, JJ_2 aux valeurs limites 13°,5 Ouest et 31,5 Ouest pour J; WW_1 à la valeur limite 5°,5 Ouest pour W. Théoriquement la courbe décrite par le pôle M devrait être comprise dans les angles L_1LL_2, J_1JJ_2 et à l'ouest de WW_1 s'il était vrai que de chaque station on voit le pôle M dans la direction de l'aiguille aimantée. En réalité ces deux directions forment un angle que nous appellerons *anomalie* et qu'on peut mesurer sachant que le pôle M est en 1916 par 70° de latitude et 97° de longitude Ouest (Gr.). On trouve que l'anomalie est sensiblement nulle pour Saint-Jean et orientale pour Londres et Washington, l'aiguille aimanté s'y tenant toujours à l'est de la direction du pôle magnétique. On pouvait prévoir ce résultat en s'appuyant sur la théorie que j'ai exposée dans ma Note du 3 avril 1916 (¹), où j'ai rattaché le magnétisme terrestre à une double cause : le ferro-magnétisme dû aux masses fixes de la croûte dont *la teneur en fer est à peu près deux fois plus grande sous les océans que sous les continents* et les courants électriques dus à l'influence solaire qui agissent seuls pour produire la variation séculaire.

Pour Londres et Washington, les océans voisins ont une orientation Sud-Ouest à Nord-Est qui dévie la boussole vers le Nord-Est, tandis qu'autour de Saint-Jean la distribution océanique est symétrique par rapport au méridien. L'anomalie étant nulle en J, la trajectoire du pôle M sera tangente à JJ_1 et JJ_2. Corrigeant pour L et W le tracé L_1LL_2, W_1W des valeurs α des anomalies de ces stations qui ont pour effet de courber les lignes de force issues de ces stations et tangentes à la courbe cherchée, on obtient finalement un tracé provisoire qui tient compte d'ailleurs des autres variations angulaires des courbes de déclinaison.

La figure 2 indique à plus grande échelle la partie de la courbe parcourue depuis 150 ans avec les dates où les écarts maxima se sont produits pour les diverses stations.

On voit que le pôle magnétique ne fait pas le tour du pôle géographique comme on le croyait, mais oscille en 800 ans environ, mais dans la région boréale qui regarde le Pacifique et où, conformément à notre théorie, pré-

(¹) *Comptes rendus*, t. 162, 1916, p. 516.

domine la forte attraction magnétique de cet océan. On comprend de suite les faits suivants :

1° La différence d'amplitude des oscillations maxima de la déclinaison qui est près du double à Londres (35°) qu'à Saint-Jean (18°) et qui se réduit pour Houston à 3°.

2° La forme singulière des courbes de déclinaison de Saint-Jean et Sydney (Nouvelle-Écosse) où le maximum Ouest est suivi au bout de 40 ans d'un minimum secondaire Est suivi d'une nouvelle augmentation.

3° La forme des courbes de déclinaison de Washington et d'Eastport ou l'augmentation de D est continue vers l'Ouest, tandis que dans les stations à l'Est (Saint-Jean) et à l'Ouest (Houston) apparaissent des minima et maxima pendant la même période.

Le pôle magnétique paraît décrire actuellement une boucle qui aura pour effet de réduire beaucoup la surface entourée par sa trajectoire : la théorie du potentiel magnétique de Gauss pouvait faire prévoir ce fait. Car elle permet de séparer l'action du magnétisme interne de celle du magnétisme produit par un effet externe; or celui-ci ne peut atteindre plus de 0,01 du magnétisme total.

L'action électromagnétique moyenne agissant pour produire la variation séculaire suivant la courbe figurée est 12 fois plus faible que celle qui résultait de l'hypothèse du pôle magnétique parcourant le parallèle de 70°. Enfin le déplacement du pôle M a bien le caractère d'un mouvement pendulaire se ralentissant aux points extrêmes de son oscillation, car sa vitesse moyenne entre 1580 et 1765 a été d'environ 12^{km} par an, alors que dans les 100 dernières années elle est réduite à 8^{km}, et que la vitesse maxima est en 1630 à la plus courte distance du pôle P.

Il paraît certain que le pôle magnétique Sud doit avoir une oscillation inverse de celle du pôle M, mais réduite dans le rapport de 1,62 à 2,05 qui représentent les intensités magnétiques à ces deux pôles. Ainsi dans un siècle le pôle magnétique Sud pourra traverser la mer de Ross de l'Ouest à l'Est.

PALÉONTOLOGIE. — *Sur un Stromatopore nouveau du Lusitanien de Cezimbra (Portugal).* Note de Mlle **Yvonne Dehorne**, présentée par M. H. Douvillé.

La présence d'espèces du genre *Stromatopora* dans les terrains secondaires n'est pas un fait nouveau : en 1903, l'auteur japonais H. Yabe (1) a décrit, sous le nom de *Stromatopora japonica*, une forme qui se rencontre dans les calcaires de Torinosu (Jurassique supérieur ou Crétacé inférieur); K. Deninger (2), en 1906, a découvert dans les couches bathoniennes de la Sardaigne l'espèce *Stromatopora Tornquisti*, espèce dont G. Osimo (3) a repris la description, en 1910, dans un Mémoire consacré à l'étude des Stromatopores du Jurassique et du Crétacé.

Il m'a été possible de reconnaître des représentants de ce genre dans des échantillons que je dois à l'obligeance de M. Paul Choffat et qui proviennent des calcaires lusitaniens de Cezimbra (Portugal) (4).

Ce sont des masses discoïdes ou cylindriques, massives ou digitées, dont la section mesure généralement 4^{cm} de diamètre. Sur les parties altérées, on observe des strates horizontales et certains échantillons présentent une surface hydrorhizale très bien caractérisée par son réseau continu et vermiculé et par de nombreuses astrorhizes. Tous les détails de la structure sont parfaitement visibles à l'œil nu.

Aucune des espèces secondaires du genre *Stromatopora*, jusqu'à présent décrites, ne présente avec autant de netteté tous les caractères propres au genre lui-même : en lames minces, tous les tubes zoïdaux délimités par les piliers radiaux et leurs prolongements sont en effet pourvus de nombreuses cloisons transversales ou *tabulae* (*fig.* 1); les planchers sont peu distincts et les couches concentriques, visibles sur les exemplaires altérés, ne correspondent pas aux *laminae* des Actinostromidés, mais à des périodes de crois-

(1) H. Yabe, *On a mesozoic Stromatopora* (*Journ. geol. Soc. Tokyo*, vol. 10, n° 123, décembre 1903).

(2) K. Deninger, *Einige neue Tabulaten und Hydrozoen aus mesozoischen Ablagerungen* (*N. Jahrb. f. Min., Geol. u. Pal.*, Bd 1, 1906, p. 61).

(3) G. Osimo, *Alcune nuove Stromatopore giuresi e cretacce della Sardegna e dell' Appennino* (*R. Accad. d. Sc. d. Torino*, 2e série, t. 61, 1910).

(4) P. Choffat, *Essai sur la tectonique de la chaîne de l'Arrabida* (*Mém. Comm. d. Serv. géol. d. Port.*, 1908).

sance ou *latilaminae;* la fibre squelettique, épaisse et dense, se détache en jaune brun au milieu de la masse claire de la calcite qui remplit les moindres cavités cœnosarcales.

Les coupes tangentielles montrent des astrorhizes constituées par trois



Fig. 1. — Coupe verticale dans un petit échantillon de *Stromatopora Choffati* montrant les nombreuses cloisons transversales ou *tabulae* des cavités cœnosarcales (gr. 8 fois).

à cinq canaux branchus qui rayonnent autour d'un point central et dont les ramifications s'anastomosent avec celles des systèmes voisins; çà et là

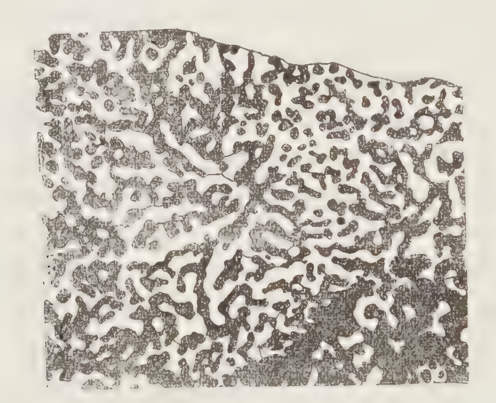


Fig. 2. — Coupe parallèle à la surface et grossie environ 7 fois; le centre de la coupe coïncide avec un centre astrorhizal.

une mince cloison transversale unit une fibre à l'autre et coupe toute la largeur des canaux (*fig.* 2).

Par l'abondance de ces cloisons transversales ou *tabulae* et grâce au

grand développement des systèmes astrorhizaux, cette forme mésozoïque se rapproche étroitement des espèces paléozoïques décrites par Nicholson (¹) sous le nom de *Stromatopora discoidea* (Silurien) et de *Stromatopora florigera* (Dévonien moyen), mais la fibre du squelette est plus épaisse dans la première espèce et les astrorhizes sont de moindre taille dans la seconde.

Je n'ai trouvé, avec les formes secondaires découvertes jusqu'à ce jour, que des ressemblances beaucoup moindres, soit que l'état de conservation des fossiles décrits laissât à désirer, soit que les auteurs ne se fussent pas attachés à donner des représentations d'une précision suffisante.

Je propose de donner à la forme que je viens de décrire et de figurer le nom de *Stromatopora Choffati*.

Les nombreux échantillons qui m'ont été fournis par M. P. Choffat sont dans un parfait état de conservation; ils ont été recueillis dans les couches à *Nerinea Elsgaudiae*, niveau marin intercalé entre deux horizons saumâtres, à la limite du Lusitanien et du Ptérocérien (²).

BOTANIQUE. — *Germination des graines de* Lepidium sativum *dans les solutions d'électrolytes*. Note de M. **Pierre Lesage**, présentée par M. Gaston Bonnier.

J'ai remarqué que, dans les solutions diluées de plusieurs sels, chlorures, nitrates, sulfates de Na, K, Az H^4, les graines de *Lepidium sativum* germent encore jusqu'à une certaine limite de concentration qui est voisine de $0^{mol},40$ au litre et j'ai dit, dans une Note récente (³), que cela indiquerait que la force osmotique de ces solutions joue un rôle important dans cette germination. Alors je n'envisageais pas le mode de dissociation qui se produit dans ces solutions diluées. Depuis, de nouveaux essais m'ont donné des résultats qui, en tenant compte de la dissociation, sembleraient ramener encore à cette idée du rôle important de la force osmo-

(¹) H.-A. Nicholson, *A monograph of the british Stromatoporoids* (*The palæont. Society*, 1886-1892).

(²) P. Choffat, *loc. cit.*, p. 23-27.

(³) Pierre Lesage, *Essais des graines de* Lepidium sativum *dans des conditions très diverses* (*Comptes rendus*, t. 163, 1916, p. 486).

tique dans la germination, au moins à ses débuts, sur ces solutions salines.

Supposons, par hypothèse, que cette force osmotique intervienne seule effectivement, au moins au début de la germination; les graines commenceront à germer dans les solutions de moins en moins diluées jusqu'à une certaine limite à laquelle ces solutions seront isotoniques quel que soit le sel et la force osmotique commune pourra s'exprimer par $M \times 22$, en appelant M le même nombre de molécules-grammes ou la même fraction de molécule-gramme activement osmotique; et 22 représentant, en atmosphères, la force osmotique corrrespondant à une molécule-gramme par litre.

J'ai mis des graines à germer dans de minces couches de solutions disposées en séries suffisamment larges, de chlorure de sodium et de glycérine, et j'ai trouvé ainsi des limites de germination que j'exprime par m pour la glycérine et par n pour le NaCl, m et n représentant la fraction de molécule-gramme de ces corps dissous dans un litre.

S'il n'y avait pas de dissociation et si la germination ne tenait qu'à la force osmotique, nous devrions avoir

$$m \times 22 = n \times 22 \quad \text{et} \quad m = n.$$

Or l'expérience donne assez sensiblement $m = 2n$.

Mais la glycérine est non électrolyte, non dissociable et le NaCl est électrolyte et dissociable; la force osmotique de la glycérine peut s'exprimer par $m \times 22$, celle du chlorure de sodium est différente de $n \times 22$. Pour apprécier cette dernière, appelons q la quantité dissociée en ions Na et en ions Cl; les valeurs qui interviennent osmotiquement sont :

$$(n - q) + q + q = n + q.$$

D'autre part, on dit que la dissociation du NaCl est très grande, presque totale; imaginons-la totale, alors $q = n$. Dans ces conditions, les valeurs qui interviennent osmotiquement, pour NaCl, ne sont plus $n \times 22$; mais $2n \times 22$ et l'isotonie exprimée par $2n \times 22 = m \times 22$, d'où $m = 2n$ correspond bien au résultat de l'expérience et montre que les débuts de la germination sont sous la dépendance immédiate de la force osmotique des solutions quel que soit le corps dissous.

Avec les sels précédemment indiqués il y aurait lieu de tenir compte de la dissociation en 2 ions des chlorures et nitrates, différente de celle des

sulfates qui se dissocient en 3 ions. Il y aurait surtout à bien préciser les limites de germination. Ce sera fait et tout porte à croire que les nouveaux résultats ne démentiront pas les premiers. En effet, des expériences en cours me font supposer fortement que, si nous représentons en fraction de molécule-gramme les quantités de sel dissoutes au litre, nous aurons pour les solutions-limites de germination les valeurs suivantes : a pour NaCl, b pour KCl et c pour K^4FeCy^6, telles que a $\left(\frac{21}{48}\right)$ est un peu plus petit que b $\left(\frac{24 \text{ à } 27}{48}\right)$, et que c $\left(\frac{10}{48}\right)$ est assez sensiblement voisin de $\left(\frac{2 \times b}{5}\right)$, ce qui correspond bien à ce que l'on sait de ces sels : les chlorures se dissocient en 2 ions, le NaCl en plus grande quantité que le KCl, et le ferrocyanure de potassium se dissocie en 5 ions.

Je dois dire que, dans les mêmes expériences en cours, j'utilise comme non électrolytes l'alcool éthylique, la glycérine et le sucre, et que les solutions de ces corps ne me donnent pas la même satisfaction, pour le moment du moins ; mais ces expériences ne sont pas terminées et elles seront reprises.

Maintenant, au point de vue pratique, quel intérêt s'attache à ces germinations? D'abord celui que présentent toujours des faits nouveaux ; ensuite, celui qui permet d'envisager les graines de *Lepidium sativum* comme utilisables dans la vérification de quelques cas discutables de dissociation, dans l'appréciation du degré de dissociation ou de la force osmotique de certaines liqueurs. Ces graines sont plus maniables, plus faciles à observer que des cellules isolées ou des tissus étudiés au microscope. Cela amène encore à penser que d'autres graines pourraient peut-être s'utiliser de la même manière, et invite à d'autres recherches dans cette voie.

HYGIÈNE. — *Sur un nouveau dispositif de filtration rapide des eaux alimentaires, après leur épuration par le procédé Lambert-Laurent.* Note (¹) de MM. C. Galaine et C. Houlbert, présentée par M. Edmond Perrier.

L'épuration des eaux suspectes, sous l'action oxydante du permanganate de potassium en léger excès, par le procédé Lambert-Laurent tend, semble-t-il, à devenir de pratique courante aussi bien dans l'armée que

(¹) Séance du 2 janvier 1917.

dans l'alimentation civile. Ce procédé ne présente qu'un seul inconvénient : pour hâter le dépôt brun de bioxyde de manganèse en suspension, on pratique une sorte d'encollage en ajoutant au liquide une proportion déterminée d'alun et de carbonate de sodium ; le précipité gélatineux qui se forme tend à entraîner la poudre d'oxyde brun au fond du vase ; mais ce dépôt, ne se faisant que très lentement, il en résulte que, si l'on veut utiliser rapidement l'eau épurée, *il faut la filtrer*.

Bien des systèmes de filtres ont été proposés, depuis les plus simples jusqu'aux plus compliqués et les plus coûteux ; nous n'en voulons critiquer aucun. Nous désirons seulement faire remarquer que, dans tous les appareils utilisés jusqu'ici, l'eau, épurée dans un récipient clos, *coule sur un filtre placé au dehors* et est ensuite recueillie dans un *réservoir de distribution*.

Nous savons bien qu'il s'agit, non pas d'arrêter des *germes microbiens*, mais d'une simple filtration ; néanmoins, il faut éviter le plus possible que le liquide se trouve en contact avec l'air extérieur, ou soit exposé à être contaminé par les mains d'expérimentateurs négligents. Ces conditions ne sont jamais réalisées dans les appareils actuels, même les plus récents, c'est pourquoi nous avons pensé qu'il était utile de faire connaître le dispositif suivant, que nous avons imaginé et qui, tout *en assurant le débit rapide* du liquide épuré, réalise en même temps *la stérilisation permanente* et, en quelque sorte, *automatique* de l'appareil filtrant.

En principe, notre procédé consiste à placer le filtre *non plus à l'extérieur du liquide* à épurer, *mais à l'intérieur ;* de cette façon le filtre reste lui-même indéfiniment aseptisé.

Le récipient est quelconque. S'il s'agit d'une barrique, par exemple, notre filtre se fixe à l'intérieur, à l'aide du robinet d'écoulement, *avec lequel il fait corps ;* il se compose d'un cylindre en toile métallique enveloppé d'un épais manchon de molleton ou d'un matelas d'ouate hydrophile recouvert de gaze ; les dimensions du cylindre, supportant le manchon filtrant, seront calculées d'après le débit qu'on veut obtenir.

Lorsque le manchon filtrant est ainsi fixé d'une façon étanche sur le robinet, dans l'ouverture disposée à cet effet, l'eau à épurer est à son tour introduite dans le récipient, par une ouverture supérieure ; on ajoute alors les substances épurantes dans les proportions voulues ([1]).

Pour faire fonctionner le filtre placé *à l'intérieur de l'eau à épurer*, il suffit

---

([1]) Voir la *Notice officielle* du Service de Santé en date du 20 mars 1915.

d'ouvrir le robinet d'écoulement et de régler le débit; le liquide passe doucement, *sans agitation*, à travers la paroi du filtre; le précipité gélatineux d'alumine hydratée, ne pouvant traverser le manchon, se trouve arrêté à l'extérieur; l'eau coule absolument limpide, le plus souvent à plein robinet, de sorte qu'on peut la recueillir directement et *supprimer le réservoir de distribution*. L'eau filtrée ne se trouve pas deux fois en contact avec l'air extérieur, comme dans les procédés actuellement en usage; le filtre lui-même, *toujours protégé à l'intérieur du liquide*, est à l'abri de toute contamination possible.

Le débit du filtre dépend, comme nous l'avons dit, de la surface filtrante; mais, comme la quantité de précipité à arrêter est relativement faible (elle ne dépasse pas 3^{g} à 4^{g} par hectolitre), le filtre peut fonctionner très longtemps. Lorsque son débit se ralentit et qu'il commence à s'encrasser, on profite d'un moment où le récipient d'épuration est vide, soit pour le nettoyer, soit pour le remplacer. Notre filtre, en résumé, fonctionne comme la bougie Chamberland; l'eau pénètre *du dehors à l'intérieur* en traversant la paroi filtrante.

La simplification réalisée par l'appareil que nous venons de décrire (*suppression du filtre extérieur et du réservoir de distribution*) permet d'employer notre dispositif filtrant dans les conditions les plus variées.

Une barrique ordinaire, nettoyée conformément aux prescriptions du Service de Santé, munie d'un robinet-filtre, peut, en effet, être installée partout à demeure, ou transportée sur un petit chariot, qui permettra de distribuer l'eau potable à une foule de groupements sur le front.

Une bonbonne en verre, d'environ 60^{l}, plus facile à nettoyer que la barrique en bois, pourra aussi être munie d'un filtre avec robinet-siphon et être employée dans les mêmes conditions; un entonnoir à longue tige, fixé dans le bouchon, permettra de remplir la bonbonne et d'amorcer le siphon-robinet; les solutions de stérilisation seront aussi introduites par l'entonnoir; après 30 minutes de contact, en ouvrant le robinet, l'eau s'écoule parfaitement stérile et incolore.

Les appareils que nous venons de décrire peuvent être installés partout, à peu de frais, et sans la moindre difficulté : dans les hôpitaux, dans les casernes, dans les campements, dans les établissements d'instruction, dans les ateliers et même dans les ménages, où la question de l'eau potable représente souvent un problème difficile à solutionner.

Il est certainement très remarquable de voir qu'un simple manchon

d'ouate hydrophile ou de molleton, dont les parois présentent une porosité considérable, puisse arrêter les particules extrêmement ténues du précipité gélatineux d'alumine hydratée. Il se produit certainement ici, *au sein d'un liquide au repos*, des phénomènes d'adhérence et de capillarité qu'il serait intéressant d'étudier plus complètement. Nous avons l'intention de revenir sur ces faits dans un travail plus étendu et plus complet.

En résumé, notre manchon-filtre réalise les améliorations suivantes :

1° Débit rapide et avec le maximum de limpidité du liquide filtré;

2° Protection de l'appareil filtrant à l'intérieur du liquide stérilisé;

3° Organisation simple et peu coûteuse des appareils d'épuration dans les conditions les plus variées.

BACTÉRIOLOGIE. — *Recherche des bacilles typhiques et paratyphiques dans les selles et les eaux*. Note [1] de MM. **F. Dienert** et **G. Mathieu**, transmise par M. Roux.

Depuis l'époque où Lœffler a signalé que le vert malachite favorisait le développement du bacille typhique et empêchait celui du colibacille, de nombreux bactériologistes ont employé ce dérivé du triphénylméthane dans la recherche du bacille typhique avec des résultats très divers, tenant, nous le pensons, à la pureté très variable de divers verts malachites vendus dans le commerce.

A la suite d'une étude systématique de l'action du vert malachite en poudre de Grübler sur de nombreuses souches [2] de bacilles typhiques, paratyphiques, et sur le *B. coli* retirés du sang ou des selles des malades, ou des eaux, études que nous publierons ultérieurement en détail, nous avons constaté qu'en ensemençant sur de l'eau peptonée, additionnée de doses variables de vert malachite, le colibacille se développe lentement pendant les premières 24 heures et ne supporte généralement pas une dose de $\frac{1}{8000}$ de vert malachite.

Le bacille d'Eberth se multiplie plus rapidement dans les solutions plus riches en vert malachite ($\frac{1}{5000}$ à $\frac{1}{2000}$) sauf les souches cultivées depuis long-

(1) Séance du 2 janvier 1917.

(2) Nous avons étudié 20 souches de bacilles d'Eberth, 10 souches de para A, 8 souches de para B et 13 souches de *B. coli*.

temps au laboratoire qui semblent aussi sensibles au vert malachite que le *B. coli*.

Le para A se développe mieux que le bacille d'Eberth; quant au para B, il semble que le vert malachite constitue pour lui un véritable milieu d'élection. En 24 heures l'eau peptonée contenant $\frac{1}{2000}$ de vert malachite est totalement décolorée par le para B.

En employant l'eau peptonée contenant des doses variables de vert malachite et en partant de cette culture sur plaque d'Endo et sur gélose-lactose tournesolée, on arrive à isoler des selles ou de l'eau les paratyphiques B et A ou des bacilles d'Eberth, et, résultat intéressant, quelquefois les deux germes dans une même selle, tandis que, par hémoculture, on n'obtient que l'un de ces germes.

Voici la méthode qui nous a réussi :

Pour les selles. — A. Prélever des selles et les délayer dans une petite quantité d'eau physiologique stérile.

B. Ensemencer une goutte de cette dilution dans deux tubes contenant de l'eau peptonée, additionnée l'un de $\frac{1}{8000}$ de vert malachite et l'autre de $\frac{1}{4000}$ de ce colorant; mettre à l'étuve à 36°.

C. Pendant la journée, toutes les quatre heures, et cela durant deux jours, prélever une petite dose et faire un étalement sur milieu d'Endo et sur gélose-lactose tournesolée; on doit examiner les colonies qui virent et celles qui ne virent pas au rouge. Parmi les premières il existe des germes intéressants, différant du *B. coli*.

Pour les eaux. — A 50$^{cm^3}$ d'eau peptonée à $\frac{1}{8000}$ et à $\frac{1}{4000}$ de vert malachite on ajoute 50$^{cm^3}$ d'eau à analyser ou 50$^{cm^3}$ d'eau de lavage d'une bougie Chamberland collodionnée sur laquelle on a titré un certain volume d'eau suspecte à analyser pour concentrer les germes. On met à l'étuve à 36° et l'on opère ensuite les ensemencements sur les boîtes d'Endo et sur gélose-lactose tournesolée comme pour les selles.

Nous avons recherché les bacilles d'Eberth et les para A et B des selles de malades pour lesquels nous avions eu des hémocultures positives.

A. Malade depuis 17 jours. Isolement de nombreuses colonies du bacille d'Eberth et de rares colonies de *B. coli*.

B. Vacciné contre le bacille d'Eberth et les para, 5 semaines auparavant; malade depuis le 5 décembre. On isole le para A des selles à l'état pur le 21 décembre.

C. Malade depuis le 5 décembre; on isole le 23 décembre le para A des selles, avec quelques rares *B*. *coli* et le para B. On n'avait trouvé que le para A à l'hémoculture.

D. Malade depuis le 22 octobre. Rechute. Hémoculture positive de bacille d'Eberth le 5 décembre. Très nombreux para B dans les selles du 21 décembre.

Recherches dans l'eau de Seine. — On isole de deux prélèvements faits à quelques jours d'intervalle :

Germe I. — Ayant les caractères du para A.

Germe II. — Bacille mobile ayant les caractères du *B. coli*, ne donne pas d'indol et noircit la gélose au plomb. Ce germe a été retrouvé dans une selle contenant le para B.

Germe III. — Un bacille mobile agglutinant au $\frac{1}{400}$ le sérum para B, paraissant voisin de bacilles Entéritidés.

Conclusions. — Tous les verts malachites du commerce ne sont pas également convenables pour la recherche des germes du genre Eberth.

Au préalable, il faut essayer ce colorant en ensemençant le para B dans de l'eau peptonée contenant $\frac{1}{3000}$ de vert malachite.

Le vert malachite est convenable quand le para B se développe et décolore le milieu en 24 heures.

En opérant comme nous venons de l'indiquer, nous avons toujours retrouvé les germes d'Eberth et de para dans les selles des malades chez lesquels l'hémoculture était positive. Tandis que l'hémoculture ne donnait qu'un seul germe, l'enrichissement par le vert malachite des selles de malades nous a donné une fois un mélange de para A et de para B.

La présence des paratyphiques dans l'eau de Seine est facile à démontrer par ce procédé, qui nous paraît digne d'une certaine vulgarisation.

A 15 heures trois quarts l'Académie se forme en Comité secret.

La séance est levée à 16 heures et demie.

A. Lx.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

Ouvrages reçus dans les séances d'octobre 1916 (*suite et fin*).

Canada. Ministère des Mines. Division des Mines. N° 223 : *L'exploitetion filonienne au Yukon; une investigation des gisements de quartz dans la division de Klondike*, par H. A. Mac Lean. — N° 280 : *Rapport sur les pierres de construction et d'ornement du Canada*, vol. II, *Provinces maritimes*, par Wm-A. Parks. — N° 308 : *Recherches sur les charbons du Canada au point de vue de leurs qualités économiques* (en 6 volumes), par J.-B. Porter et R.-J. Durley, vol. IV. — N° 310 : Recherches sur le cobalt et ses alliages, faites à l'Université Queens, Kingston, Ontario, deuxième partie : *Les propriétès physiques du cobalt métallique*, par H.-L. Kalmus et C. Harper. — N° 384 : *Annual report on the mineral production of Canada, during the calendar year* 1914, by John Mc Leish. Ottawa, Imprimerie du gouvernement, 1915 et 1916; 5 vol. in-8°.

Canada. Department of Mines. Geological Survey. N° 1591; memoir 83; n° 70, geological series : *Upper ordovicians formations in Ontario and Quebec*, by A.-F. Foerste. Ottawa, Government Printing Bureau, 1916; 1 vol. in-8°.

Canada. Department of the Interior. Publications of the Dominion Observatory; vol. III, n° 6 : *Precise Levelling;* n° 7 : *Orbit of the spectroscopic binary* 14 *Aurigae*. Ottawa, Government Printing Bureau, 1916; 2 fasc. in-4°.

Canada. Department of marine and fisheries. *Report of the meteorological Service of Canada for the year ended december* 31, 1913, by R. F. Stupart. Ottawa, J. de L. Taché, 1916; 1 vol. in-4°.

Results of meteorological Observations in the five years 1911-1915, *also of underground temperatures in the twelve years* 1898-1910, *made at the* Radcliffe Observatory, vol. LI. Oxford, Humphrey Milford, 1916; 1 vol. in-8°.

The nautical Almanac and astronomical ephemeris for the year 1919, *for the meridian of the royal Observatory at Greenwich*, published by order of the Lords commisioners of the Admiralty. Edinburgh, Neill, 1916; 1 vol. in-8°.

Transactions of the Royal Society of Edinburgh, vol. L, part IV, session 1913-1914. Edinburgh, Robert Grant, 1916; 1 vol. in-4°.

Comunicações da Comissão do Servico géológico de Portugal, t. XI, 1915-1916. Lisboa, Serviço géológico, 1916; 1 vol. in-8°.

Venezia. Ufficio idrografico del R. Magistrato alle acque. *Norme ed istruzioni per il servizio meteorologico*, et *Catalogo alphabetico della biblioteca, della lettera* A *alla lettera* C *compresa*. Venezia, Carlo Ferrari, 1916; 1 fasc. in-8° et 1 fasc. 27 × 37.

Mi aportacion clinica : la vitalizacion, kayovarterapia y fixoterapia como tres nuevos procedimientos del eubiotonogenismo, por CIRIACO YRIGOYEN. San Sebastian, Tipografia Editorial Guipuzcoana, 1916; 1 vol. in-8°.

La cuadratura del circulo y de la eliptica, por INOCENCIO ANDION. La Paz, Rafael Carranza Pinto, 1916; 1 fasc. in-4°.

Year Book of the Michigan College of Mines 1915-1916; *announcement of courses for* 1916-1917. Houghton, Michigan, 1916; 1 vol. in-16.

Annual report of the Peabody Institute for the fiscal year ending may 31, 1916. Baltimore, Franklin, 1916; 1 fasc.

ERRATA.

(Séance du 11 décembre 1916.)

Note de M. *E. Ariès*, Sur la détermination de l'énergie libre par l'équation d'état de Clausius :

Page 738, lignes 5-6, la seconde formule doit être $-\Phi = cT \log AT - cT - B$.

(Séance du 26 décembre 1916.)

Note de M. *E. Ariès*, Sur une forme de la fonction de la température dans l'équation d'état de Clausius :

Page 964, lignes 2-3 en remontant, la première formule doit être $K = \dfrac{27 R^2 T_c^{n+2}}{64 P_c}$.